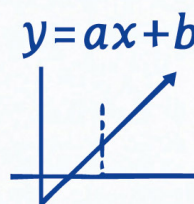
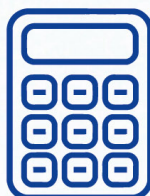
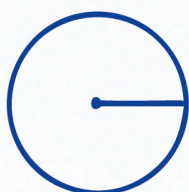
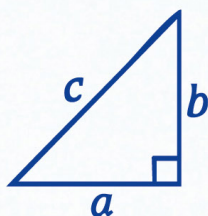


ตะลุยโจทย์ คณิต สอบเข้า ม.4

จุฬารัตนราชวิทยาลัย

MWIT | KOSEN

รวมโจทย์คณิตศาสตร์เน้นสอบเข้าโรงเรียนวิทยาศาสตร์ชั้นนำ
เข้าใจง่าย อธิบายละเอียด ฝึกคิด แบบสอวน.
พร้อมพาคุณพิชิต | MWIT | KOSEN | จุฬารัตนฯ



MWIT | KOSEN

สารบัญ



บทนำ	6
เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่ออกสอบ	8
แนวข้อสอบ ชุดที่ 1	9
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 1	21
เฉลยละเอียด	22
แนวข้อสอบ ชุดที่ 2	51
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 2	65
เฉลยละเอียด	66
แนวข้อสอบ ชุดที่ 3	97
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 3	111
เฉลยละเอียด	112
แนวข้อสอบ ชุดที่ 4	147
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 4	161
เฉลยละเอียด	162
แนวข้อสอบ ชุดที่ 5	199
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 5	213
เฉลยละเอียด	214
แนวข้อสอบ ชุดที่ 6	251
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 6	265
เฉลยละเอียด	266

บทนำ

ลักษณะของข้อสอบ

ข้อสอบเข้ามหิดลวิทยานุสรณ์ (MWIT) และจุฬารัชมงคลราชวิทยาลัย รอบที่ 1 นับเป็นข้อสอบที่ยากมาก แม้ส่วนใหญ่จะเป็นข้อสอบกลางๆ จนถึงยาก และข้อที่ยากก็ยากจริงจัง ซึ่งความยากนั้นแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ **ยากในตัวเอง**เหมือนข้อสอบโอลิมปิก ที่ถ้าไม่เคยเห็นแนวข้อสอบแบบนี้มาก่อน ก็ยากที่จะคิดวิธีแก้โจทย์นั้นได้ และ**ยากเพราะความรู้ยังไม่ถึง** กล่าวคือโจทย์เป็นความรู้ ม.ปลายที่ยังไม่ได้เรียน ดังนั้นจึงยากมากสำหรับนักเรียน ม.ต้น ที่จะทำข้อสอบนี้ได้ทั้งหมดโดยไม่ได้เตรียมตัวมาล่วงหน้าเลย

ดังนั้นการเตรียมตัวที่ดีคือนอกจากจะทบทวนสิ่งที่ได้เรียนมาตั้งแต่ ม.ต้น แล้วยังควรอ่านเนื้อหาคร่าวๆ ของ ม.ปลาย ด้วย และการทำข้อสอบในหนังสือเล่มนี้ เพื่อให้ได้ฝึกฝนทำโจทย์กลางๆ และง่ายๆ พร้อมทั้งเจอโจทย์ยากๆ ที่ไม่เคยเจอมาก่อน เพื่อดูแนวทางการแก้โจทย์หลายๆ แบบ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโจทย์ที่อาจจะพบได้ในอนาคต

ข้อสอบที่ผ่านมา ไม่แน่ชัดว่ามีลักษณะเหมือนกันทุกปีหรือไม่ แต่ส่วนใหญ่มักจะแบ่งเป็น 2 ส่วน มีเวลาสอบ 90-120 นาที ดังนี้

PART 1 SEEN (ข้อสอบปรนัย) แบบตัวเลือก 4-5 ตัวเลือก

PART 2 UNSEEN (ข้อสอบอัตนัย) แบบระบายคำตอบ

ซึ่งโดยปกติข้อสอบที่ยากมากๆ มักอยู่ในส่วนที่ 2 ข้อทำๆ มักเป็นส่วนยากที่สุดสำหรับน้องๆ ดังนั้นด้วยเวลาที่มีจำกัด และมีแนวโน้มสูงที่จะทำไม่เสร็จทันเวลา พี่จึงแนะนำให้น้องๆ ทำส่วนที่ตนเองถนัดก่อนเสมอ และถ้าเจอข้อที่มั่นใจว่ายากแน่ๆ ให้ข้ามไปก่อนอย่าลังเล เมื่อมีเวลาจึงกลับมาทำทีหลัง

2. ตอบข้อ 3.

จากโจทย์ แยกตัวประกอบของตัวส่วนของทุกเศษส่วนในสมการพหุนามได้ดังนี้

$$\frac{x-2}{(x-2)(x+4)} - \frac{x+2}{(x+4)(x-3)} = \frac{x^2-2x-8}{(x+4)(x-3)}$$

นำ $(x+4)$ คูณตลอด;

$$\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+4)}} - \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)}(x-3)} = \frac{(x^2-2x-8)\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)}(x-3)}$$

$$1 - \frac{x+2}{x-3} = \frac{x^2-2x-8}{x-3}$$

นำ $(x-3)$ คูณตลอด;

$$(x-3) - (x+2) = x^2-2x-8$$

$$x-3-x-2 = x^2-2x-8$$

$$x^2-2x-3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3, -1$$

ใช้ไม่ได้ เพราะทำให้
ตัวส่วนเป็นศูนย์

ดังนั้น ผลรวมของคำตอบของสมการเท่ากับ -1

3. ตอบข้อ 2.

อาศัยความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบททวินาม

$$(a+b)^n = \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{0}b^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

หรือใช้สามเหลี่ยมของปาสคาล

Binomial Coefficient of $(a+b)^n$

$(a+b)^0$	→	1
$(a+b)^1$	→	1 1
$(a+b)^2$	→	1 2 1
$(a+b)^3$	→	1 3 3 1
$(a+b)^4$	→	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	→	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	→	1 6 15 20 15 6 1

แต่โจทย์กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $a = mn > 0$

จึงได้ $b = a - 20 > -20$ นั่นคือ $b = 35$

$$\begin{aligned} m^3 - n^3 &= (m - n)^3 + 3(m^2n - mn^2) \\ &= 35^3 + 3(1,925) \\ &= 42,875 + 5,775 \\ &= 48,650 \end{aligned}$$

ดังนั้น $m^3 - n^3 = 48,650$

29. ตอบข้อ 4.

วิธีที่ 1 จากสมการ $4x + 3y = 60$ เขียน y ในเทอมของ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y &= \frac{60 - 4x}{3} \\ xy &= \frac{x(60 - 4x)}{3} \\ xy &= \frac{60x - 4x^2}{3} \\ xy &= -\frac{1}{3}(4x^2 - 60x) \\ xy &= -\frac{1}{3}[4(x^2 - 15x)] \\ xy &= -\frac{4}{3}\left[\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2\right] \\ xy &= -\frac{4}{3}\left[\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{225}{4}\right] \\ xy &= -\frac{1}{3}[(2x - 15)^2 - 225] \end{aligned}$$

จากสมการสุดท้าย จะสังเกตเห็นว่า พจน์ $(2x - 15)^2$ เป็นตัวกำหนดว่าค่า xy จะมากหรือน้อย เพราะ $(2x - 15)^2$ จะเป็นค่าบวกเสมอ ซึ่งจะหักล้างกับ -225 แล้วจึง

ไปคูณกับ $-\frac{1}{3}$ แสดงว่า xy จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $(2x - 15)^2 = 0$

ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} xy &= -\frac{1}{3}(-225) \\ xy &= 75 \end{aligned}$$

Part 2 จำนวน 10 ข้อ

31. พืที่ยืนห่างจากฐานเสาธง 40 เมตร เขาก้มลงมองเท้าตัวเอง พบว่าเขายืนตรงเงาของยอดเสาธงพอดี ขณะนั้นธงไม้ได้ชักขึ้นสุดยอดเสา เขาเดินเข้าไปหาเสาธงแล้วหยุดอยู่ตรงเงาของธงพบว่าเงาของเขาทับยอดเงาของเสาธงพอดี ธงถูกชักขึ้นสูงกี่เมตร ถ้าเสาธงและพืที่สูง 12 เมตร และ 180 เซนติเมตร ตามลำดับ

THINK BEYOND BOOK

32. ลูกเจิมมีต้นเงาะทั้งหมด 600 ต้น ในปีที่ผ่านมาเก็บเกี่ยวเงาะได้ 400 กิโลกรัม แต่ในปีนี้ต้นเงาะตายไป 90 ต้น ถ้าต้นเงาะที่เหลืออยู่ยังคงให้ผลผลิตเป็นอัตราส่วนเท่าเดิม แล้วปีนี้ผลผลิตจะลดลงกี่เปอร์เซ็นต์

THINK BEYOND BOOK

นำ ② ยกกำลังสาม;

$$\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right)^3 = 14^3$$

$$z^9 - 3z^6\left(\frac{1}{z^3}\right) + 3z^3\left(\frac{1}{z^6}\right) - \frac{1}{z^9} = 14^3$$

$$z^9 - 3\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) - \frac{1}{z^9} = 14^3$$

$$z^9 - 3(14) - \frac{1}{z^9} = 14^3$$

$$z^9 - \frac{1}{z^9} = 196(14) + 3(14)$$

แทน $z = \frac{x^2}{y^2}$;

$$z^9 - \frac{1}{z^9} = 199(14)$$

$$\frac{x^{18}}{y^{18}} - \frac{y^{18}}{x^{18}} = 2,786$$

16. ข้อ 4.

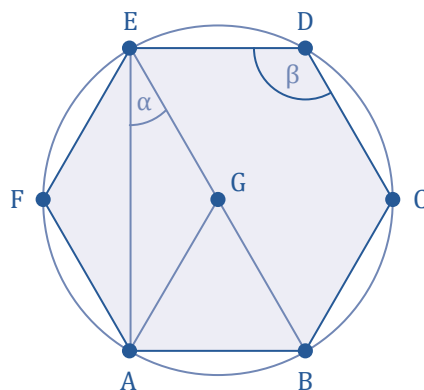
คิดแยกเป็น 2 ทางเลือกโดยใช้หลักการบวก จึงคำนวณในแต่ละทางเลือกซึ่งมีขั้นตอนการเลือกโดยใช้หลักการคูณ

- ① เลือกประธานและรองประธานเป็นเพศชายก่อน แล้วจึงเลือกเลขานุการเป็นเพศหญิง
จะเลือกได้ $7 \times 6 \times 5 = 210$ วิธี
- ② เลือกประธานและรองประธานเป็นเพศหญิงก่อน แล้วจึงเลือกเลขานุการเป็นเพศชาย
จะเลือกได้ $5 \times 4 \times 7 = 140$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีเลือกได้ $210 + 140 = 350$ วิธี

17. ข้อ 3.

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าทุกรูปสามารถบรรจุลงในวงกลมได้พอดี ดังรูป



$$\begin{aligned}\text{เวลา} &= \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= 40 \text{ วินาที}\end{aligned}$$

ดังนั้น ใช้เวลาอีก 40 วินาทีที่ชายคนนี้จะมองเห็นเรือลำนั้นเป็นมุมก้ม 30° พอดี

40. ตอบ 8

วิธีที่ 1

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{m+n}{mn} = \frac{3}{5}$$

$$5(m+n) = 3mn \quad \dots \textcircled{1}$$

$$3 \times \textcircled{1};$$

$$15(m+n) = 9mn$$

จัดรูปให้อยู่ในรูป $3m$ และ $3n$;

$$5(3m+3n) = (3m)(3n)$$

$$(3m)(3n) - 5(3m+3n) = 0$$

$$(3m)(3n) - (5)(3m+3n) + 25 = 25$$

$$(3m)(3n) - (5)(3m) - (5)(3n) + (5)(5) = 25$$

$$(3m-5)(3n-5) = 25$$

เนื่องจาก $3m-5$ และ $3n-5$ เป็นจำนวนเต็ม และมีผลคูณเท่ากับ 25 จึงพิจารณา
คู่ตัวประกอบทั้งหมดของ 25 คือ $(1, 25)$, $(25, 1)$, $(-1, -25)$ และ $(-25, -1)$ โดย
กรณีตัวประกอบลบจะทำให้ m และ n ไม่เป็นจำนวนเต็มจึงตัดทิ้งเหลือเพียง
 $(1, 25)$ และ $(25, 1)$

กรณีที่ 1 $3m-5=1$ และ $3n-5=25$

จะได้ $m=2$ และ $n=10$ ผิด เพราะ $m < n$

กรณีที่ 2 $3m-5=25$ และ $3n-5=1$

จะได้ $m=10$ และ $n=2$ ถูกต้อง เพราะ $m > n$

ดังนั้น $m-n=10-2=8$

2. ตอบข้อ 1.

การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดต้องพยายามจัดรูปตัวแปรให้เหลือตัวเดียว พจน์เดียว
แต่ $x^2 + 2\sqrt{9 - x^2}$ ดิตรากอยู่ จัดรูปได้ยาก จึงควรใช้วิธีเลี้ยงเป็นการสมมติตัวแปรใหม่ดังนี้
ให้

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \dots\dots ①$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$x^2 = 9 - y^2 \quad \dots\dots ②$$

โดย

$$y^2 \leq 9$$

$$0 \leq y \leq 3$$

นำค่า y จาก ① และ ② แทนในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + 2\sqrt{9 - x^2} &= 9 - y^2 + 2y \\ &= 9 - (y - 1)^2 + 1 \\ &= 10 - (y - 1)^2 \end{aligned}$$

ซึ่ง $10 - (y - 1)^2$ จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $(y - 1)^2 = 0$ จะได้ $A = 10$

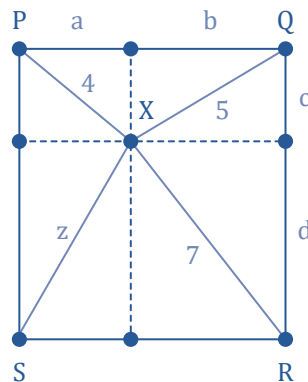
และ $10 - (y - 1)^2$ จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $(y - 1)^2$ มีค่าสูงสุด นั่นคือ $y = 3$

จะได้ $10 - (y - 1)^2 = 10 - (3 - 1)^2 = 6$ นั่นคือ $B = 6$

ดังนั้น $A - B = 10 - 6 = 4$

3. ตอบข้อ 1.

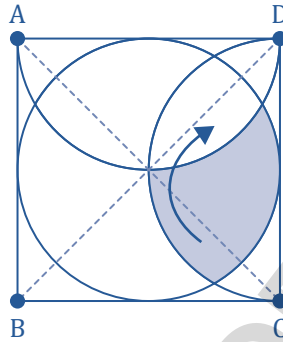
จากโจทย์ วาดรูปได้ดังนี้



จากรูป สามารถลากเส้นประจากจุด X ไปตั้งฉากกับด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทำให้ได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 8 รูป ที่มีด้านประกอบมุมฉากที่เหมือนกันคือ a , b , c และ d ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

23. ตอบข้อ 2.

จากรูป ลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตัดวงกลมและครึ่งวงกลม ดังรูป



จะเห็นว่าเมื่อหมุนรูปส่วนที่แรเงาสวนเล็กๆ ทิศทวนเข็มนาฬิกา 90° ส่วนที่แรเงาทั้งหมดจะเป็น
หนึ่งในสี่ของพื้นที่วงกลมที่บรรจุอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั่นเอง

เนื่องจาก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ 64 ตารางหน่วย แสดงว่า แต่ละด้านยาว 8 หน่วย

นั่นคือ รัศมีของวงกลมที่แนบในรูปสี่เหลี่ยมยาว 4 หน่วย

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ส่วนที่แรเงา} &= \frac{1}{4} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{4} \times \pi \times 4^2 \text{ ตารางหน่วย} \\ &= 4\pi \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

ดังนั้น ส่วนที่แรเงามีพื้นที่ 4π ตารางหน่วย

ข้อสังเกต



โจทย์ข้อนี้ควรย้ายเส้นส่วนโค้งบางส่วนมาประกอบกัน เพื่อให้เห็นเป็นส่วนของ
วงกลมที่คำนวณพื้นที่ได้ง่ายขึ้น โดยไม่จำเป็นต้องหาพื้นที่ส่วนสีเทาโดยตรง
จากการลบพื้นที่หลายส่วน

5. กำหนดให้ $z - 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่หาร $3z^2 + z - 2$ ลงตัว ผลบวกของจำนวนเต็ม z ทุกจำนวนเท่ากับเท่าไร
1. 15
 2. 23
 3. 28
 4. 40
6. กำหนดให้ PQR เป็นรูปสามเหลี่ยม ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด P ไป $\overline{RQ}$ ที่จุด S ทำให้ $PR \cdot Q = SP \cdot Q$ ถ้า $PR = 9$ หน่วย, $PQ = 12$ หน่วย และ $PS = 6$ หน่วย แล้วข้อใดถูกต้อง
1. $\triangle PRS$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม และ $QS = 8$ หน่วย
 2. $\triangle PRS$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $QS = 10$ หน่วย
 3. $\triangle PRS$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน และ $QS = 8$ หน่วย
 4. $\triangle PRS$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $QS = 10$ หน่วย
7. กำหนดให้ $x = \sqrt[3]{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ค่าของ $2x^3 + 6x + \frac{2}{3}$ เท่ากับเท่าไร
1. $\frac{1}{3}$
 2. 3
 3. 5
 4. 6
8. จำนวนเต็มทีน้อยที่สุดที่มากกว่า $\frac{7^{103}}{7^{100} + 7^{10}}$ คือจำนวนเต็มในข้อใด
1. 48
 2. 49
 3. 342
 4. 343
9. กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่
- a หารด้วย 7 เหลือเศษ 2
 - b หารด้วย 7 เหลือเศษ 3
 - c หารด้วย 7 เหลือเศษ 4
- $a^2 + bc + ac + 3$ หารด้วย 7 เหลือเศษเท่าไร
1. 3
 2. 4
 3. 5
 4. 6

จากสูตรผลของต่างกำลังสามจะได้

$$\begin{aligned} 2x^3 + 6x + \frac{2}{3} &= 2\left(3 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \\ &= \frac{16}{3} + \frac{2}{3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น $2x^3 + 6x + \frac{2}{3} = 6$

8. ตอบข้อ 4.

$$\begin{aligned} \frac{7^{103}}{7^{100} + 7^{10}} &= \frac{7^{103} + 7^{13} - 7^{13}}{7^{100} + 7^{10}} \\ &= \frac{7^3(7^{100} + 7^{10}) - 7^{13}}{7^{100} + 7^{10}} \\ &= \frac{7^3(7^{100} + 7^{10})}{7^{100} + 7^{10}} - \frac{7^{13}}{7^{100} + 7^{10}} \\ &= 7^3 - \frac{7^{13}}{7^{100} + 7^{10}} \\ &= 343 - \frac{7^{13}}{7^{100} + 7^{10}} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{7^{13}}{7^{100} + 7^{10}} < 1$ แสดงว่า 343 ลบจำนวนที่น้อยกว่า 1

จะได้ $342 < \frac{7^{103}}{7^{100} + 7^{10}} < 343$

ดังนั้น จำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่า $\frac{7^{103}}{7^{100} + 7^{10}}$ คือ 343

ข้อสังเกต



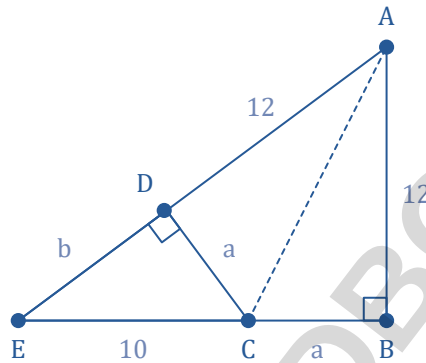
การแยก 7^{10} ออกจากพจน์ก่อนดำเนินการต่อ ดังนี้

$$\frac{7^{103}}{7^{100} + 7^{10}} = \frac{7^{10}(7^{93})}{7^{10}(7^{90} + 1)} = \frac{7^{93}}{7^{90} + 1}$$

ช่วยให้รูปแบบของนิพจน์ง่ายขึ้นและคำนวณได้สะดวกยิ่งขึ้น อย่างไรก็ตามวิธีดังกล่าวไม่จำเป็นต่อการหาคำตอบ สามารถดำเนินการด้วยวิธีอื่นที่เหมาะสมได้เช่นกัน

29. ตอบข้อ 3.

จากโจทย์ วาดรูปได้ดังนี้



โจทย์ข้อนี้สามารถหาคำตอบด้วยวิธีที่หลากหลาย จะเห็นว่าจากรูปประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและรูปสามเหลี่ยมคล้าย นอกจากนี้ยังมีความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ที่สามารถใช้สูตรหาพื้นที่ได้หลายแบบ

วิธีที่ 1 ใช้รูปสามเหลี่ยมคล้าย

$$\triangle CDE \sim \triangle ABE$$

จะได้ว่า

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AB}{AE}$$

$$\frac{a}{10} = \frac{12}{b + 12}$$

$$ab + 12a = 120$$

..... ①

$$\text{พื้นที่ของ } \triangle ECD = \frac{1}{2} ab$$

$$24 = \frac{1}{2} ab$$

$$ab = 48$$

แทนค่าใน ① ;

$$48 + 12a = 120$$

$$12a = 72$$

$$a = 6$$

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ของ } \triangle ABE &= \frac{1}{2} \times EB \times AB \\ &= \frac{1}{2} \times (10 + 6) \times 12 \text{ ตารางหน่วย} \\ &= 96 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\triangle ABE$ มีพื้นที่ 96 ตารางหน่วย

วิธีที่ 2 ใช้ความสัมพันธ์ของพื้นที่

พิจารณา $\triangle ABE$ ประกอบด้วย $\triangle ECD$ และ $\square ABCD$ (ซึ่งประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป) จะได้

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ของ } \triangle ABE &= \text{พื้นที่ของ } \triangle ECD + (2 \times \text{พื้นที่ของ } \triangle ABC) \\ \frac{1}{2} \times EB \times AB &= 24 + 2 \left(\frac{1}{2} \times CB \times AB \right) \\ \frac{1}{2} \times (10 + a) \times 12 &= 24 + (a \times 12)\end{aligned}$$

$$6a + 60 = 24 + 12a$$

$$6a = 36$$

$$a = 6$$

$$\begin{aligned}\text{จาก } \text{พื้นที่ของ } \triangle ABE &= \frac{1}{2} \times (10 + a) \times 12 \text{ ตารางหน่วย} \\ &= \frac{1}{2} \times (10 + 6) \times 12 \text{ ตารางหน่วย} \\ &= 96 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

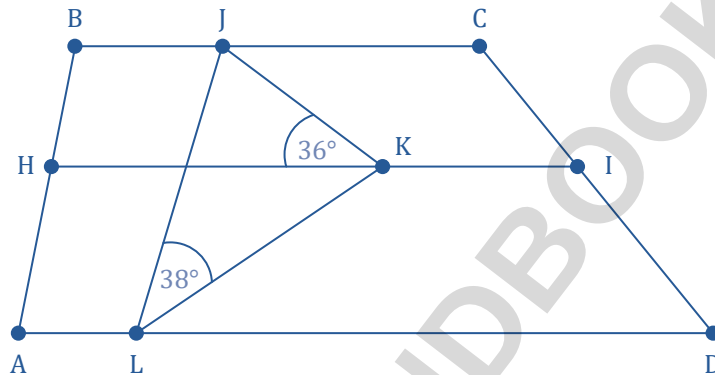
ดังนั้น $\triangle ABE$ มีพื้นที่ 96 ตารางหน่วย

ข้อสังเกต



วิธีนี้ใช้หลักการของรูปสามเหลี่ยมคล้าย โดยสามารถเลือกคู่ของด้านที่สมนัยกันได้ 3 คู่ ถ้าเลือกคู่ด้านไม่ถูกต้อง อาจทำให้ตั้งสมการไม่ถูกต้อง ดังนั้น ควรตรวจสอบด้านที่สมนัยกันให้ชัดเจนก่อนคำนวณ

24. กำหนดให้ $\triangle JKL$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว บรรจุอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ดังรูป ลาก $\overline{HI}$ ขนานไปกับด้านคู่ขนานของ $\square ABCD$ ตัดผ่านจุด K พอดี พบว่า $\angle J\hat{L}K = 38^\circ$ และ $\angle H\hat{K}J = 36^\circ$ แล้ว $\angle D\hat{L}K$ มีขนาดกี่องศา



1. 20°
 2. 25°
 3. 30°
 4. 35°
25. กำหนดให้ a, b, c, d และ e เป็นจำนวนเต็มที่มีอัตราส่วนเป็น $a : b : c : d : e$
 $: e + a = 4 : 5 : 6 : 7 : 28$ ถ้า $c + d + e = 58$ แล้วค่าของ $a - 2b + 3c - 3d + e$
 เท่ากับเท่าไร
1. 2
 2. 4
 3. 6
 4. 8
26. บ้านของอลันและอลิซอยู่ริมน้ำ อลันพายเรือทวนน้ำไปหาอลิซด้วยอัตราเร็ว 300 เมตรต่อนาที ใช้เวลา 36 นาที อลิซพายเรือตามน้ำไปหาอลันด้วยอัตราเร็ว 150 เมตรต่อนาที ใช้เวลา 45 นาที อลันและอลิซรู้สึกว่าใช้เวลาเดินทางมากเกินไป จึงตัดสินใจออกเดินทางจากบ้านของแต่ละคนพร้อมกัน แล้วมาพบกันกลางทาง ถ้าทั้งสองคนยังคงพายเรือด้วยอัตราเร็วเท่าเดิม และกระแสน้ำมีอัตราเร็วเท่าเดิม แล้วทั้งสองคนจะพบกันที่ตำแหน่งห่างจากบ้านของอลิซกี่เมตร
1. 1,200 เมตร
 2. 4,000 เมตร
 3. 5,000 เมตร
 4. 9,000 เมตร

13. ตอบข้อ 4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} &\leq 0 \\ \frac{1}{(x-3)(x-2)} + \frac{1}{(x-4)(x-3)} + \frac{1}{(x-5)(x-4)} + \frac{1}{(x-6)(x-5)} &\leq 0 \\ \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) + \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}\right) + \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}\right) + \left(\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-5}\right) &\leq 0 \\ \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-2} &\leq 0 \\ \frac{(x-2) - (x-6)}{(x-6)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{4}{(x-6)(x-2)} &\leq 0 \end{aligned}$$



ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการคือ 3, 4, 5

แต่เนื่องจากโจทย์เดิมมีเงื่อนไข $x \neq 2, 3, 4, 5, 6$ เพราะทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีคำตอบ

14. ตอบข้อ 3.

$$Z = 2 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \dots}}} \quad \text{..... ①}$$

$$Z - 2 = \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \dots}}} \quad \text{..... ②}$$

แทน ② ใน ①;

$$Z = 2 + \frac{3}{4 + (Z - 2)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} &= -\frac{xy}{xyz} - \frac{yz}{xyz} - \frac{xz}{xyz} \\ &= \frac{-(xy + yz + xz)}{xyz} \\ &= \frac{-(-4)}{8} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

แทน ② และ ③ จะได้

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{2}$$

37. ตอบ 122

พิจารณา U และ V มีความคล้ายกันอยู่มาก และ 424 กับ 408 ต่างกัน 16 พอดี

$$\begin{aligned}\text{ให้ } z = 26 \text{ จะได้ } U &= 408 + \frac{1}{26} \\ &= (16 \times 26) - 8 + \frac{1}{26}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (16z - 8) + \frac{1}{z} \\ &= \frac{16z^2 - 8z + 1}{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= 424 + \frac{1}{26} \\ &= (16 \times 26) + 8 + \frac{1}{26}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (16z + 8) + \frac{1}{z} \\ &= \frac{16z^2 + 8z + 1}{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2U + 3V - 5\sqrt{UV} \\ &= 2\left(\frac{16z^2 - 8z + 1}{z}\right) + 3\left(\frac{16z^2 + 8z + 1}{z}\right) - 5\sqrt{\left(\frac{16z^2 - 8z + 1}{z}\right)\left(\frac{16z^2 + 8z + 1}{z}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2U + 3V - 5\sqrt{UV} &= \frac{32z^2 - 16z + 2}{z} + \frac{48z^2 + 24z + 3}{z} - 5\sqrt{\frac{(4z - 1)^2(4z + 1)^2}{z^2}} \\
 &= \frac{80z^2 + 8z + 5}{z} - \frac{5(4z - 1)(4z + 1)}{z} \\
 &= \frac{80z^2 + 8z + 5}{z} - \frac{5(16z^2 - 1)}{z} \\
 &= \frac{80z^2 + 8z + 5}{z} - \frac{80z^2 - 5}{z} \\
 &= \frac{8z + 10}{z} \\
 &= 8 + \frac{10}{z} \\
 &= 8 + \frac{10}{26} \\
 &= 8 + \frac{5}{13} \\
 &= \frac{109}{13}
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $a = 109$ และ $b = 13$

ดังนั้น $a + b = 109 + 13 = 122$

38. ตอบ 1

ให้ m และ n เป็นค่าคงที่ของส่วนแรกและส่วนที่สอง ตามลำดับ

จะได้ $a = mb + \frac{n}{2b}$

ถ้า $a = 4$ เมื่อ $b = 1$ จะได้ $4 = m + \frac{n}{2}$ ①

ถ้า $a = 5$ เมื่อ $b = 2$ จะได้ $5 = 2m + \frac{n}{4}$ ②

$2 \times$ ①; $8 = 2m + n$ ③

③ - ②; $3 = \frac{3}{4}n$

$n = 4$

พิจารณาฐานนิยม

ข้อมูลเดิมมีฐานนิยม 3 จำนวน ได้แก่ 82, 83 และ 85 ซึ่งมีซ้ำกันอย่างละ 2 จำนวน โอกาสที่ฐานนิยมจะเปลี่ยนคือต้องเป็น 82, 83 และ 85 ซึ่งจะทำให้ฐานนิยมเป็นจำนวนใดจำนวนหนึ่งเท่านั้น และอีกกรณีหนึ่งคือต้องเป็น 81 ซึ่งจะทำให้ฐานนิยมเพิ่ม 81 ขึ้นมาอีกจำนวนหนึ่ง ดังนั้น ฐานนิยมถูกทุกข้อ

พิจารณามัธยฐาน

มัธยฐานคือค่าข้อมูลที่อยู่ตรงกลาง ซึ่งข้อมูลเดิมมี 7 จำนวน ทำให้ข้อมูลที่ 4 เป็นมัธยฐานคือ 83 เมื่อเพิ่มข้อมูลเข้าไปอีก 1 จำนวน ทำให้ข้อมูลมี 8 จำนวน ตำแหน่งตรงกลางจะไม่มี เพราะตรงกลางอยู่ระหว่างตำแหน่งที่ 4 และ 5 ต้องนำข้อมูลตำแหน่งที่ 4 และ 5 มาหาค่าเฉลี่ย ถ้าข้อมูลที่เพิ่มเข้าไปมีค่าตั้งแต่ 82 “ลงไป” ข้อมูลตำแหน่งที่ 4 และ 5 จะเป็น 82 และ 83 ตามลำดับ ทำให้มัธยฐานเปลี่ยนเป็น 82.5 แต่ถ้าข้อมูลที่เพิ่มเข้าไปมีค่าตั้งแต่ 83 “ขึ้นไป” ข้อมูลตำแหน่งที่ 4 และ 5 จะเป็น 83 ทั้งคู่ ทำให้มัธยฐานยังคงเท่าเดิม

ดังนั้น ตัวเลือกข้อ 4 มัธยฐานผิด

พิจารณาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดเดิม} = \frac{81 + 82 + 82 + 83 + 83 + 85 + 85}{7} = 83$$

ถ้าข้อมูลที่เพิ่มเข้าไปเป็น 83 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตจะไม่เปลี่ยน แต่ถ้าไม่ใช่ 83 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตจะเปลี่ยน

ดังนั้น ตัวเลือกข้อ 4 ไม่ถูกต้อง

ข้อสังเกต



สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยวิธี “เกลี่ยค่า” โดยปรับข้อมูลที่สูงและต่ำกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตให้เข้าใกล้กัน เช่น จาก 85 และ 81 ให้เป็น 83 ทั้งคู่

$$85 \rightarrow 84 \rightarrow 83$$

$$81 \rightarrow 82 \rightarrow 83$$

เมื่อปรับข้อมูลทั้งหมดให้เป็น 83 ได้ จึงสรุปได้ทันทีว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตคือ 83 วิธีนี้ช่วยลดขั้นตอนการบวกข้อมูลทั้งหมดและคำนวณได้รวดเร็วขึ้น

พิจารณาวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด

ที่ตำแหน่งแรกมีตัวอักษร 6 ตัวให้เลือก

ที่ตำแหน่งที่ 2 มีตัวอักษรเหลือ 5 ตัวให้เลือก

ที่ตำแหน่งที่ 3 มีตัวอักษรเหลือ 4 ตัวให้เลือก

คิดแบบนี้ไปเรื่อยๆ จนถึงตำแหน่งสุดท้าย จะได้ $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$

พิจารณาวิธีเรียงสับเปลี่ยนกรณีสระทั้ง 2 ตัวอยู่ติดกัน

ให้มองสระที่อยู่ติดกันเป็นตัวอักษรตัวเดียว จะเป็นการจับตัวอักษร 5 ตัว มาเรียงสับเปลี่ยน ซึ่งวิธีคิดเหมือนกับด้านบน จะได้ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

และสระก็สลับกันเองได้อีก 2 วิธี จึงเป็น $5! \times 2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีจัดเรียงโดยที่สระไม่อยู่ติดกัน} \quad 6! - 2(5!) &= 6(5!) - 2(5!) \\ &= 4(5!) \\ &= 4 \times 120 \\ &= 480 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะมีวิธีสลับตัวอักษรได้ 480 วิธี

40. ตอบ (4, 8)

จากโจทย์ มีจุด $A(-2, 2)$ ผ่านพาราโบลา $y = ax^2$

จะได้ $2 = a(-2)^2$

$$a = \frac{1}{2}$$

จะได้สมการพาราโบลาเป็น $y = \frac{x^2}{2}$

จุด B อยู่บนด้านที่ขนานไปกับแกน X ดังนั้น ค่า y จึงเท่ากับจุด A จะได้

$$2 = \frac{x^2}{2}$$

$$x = 2$$

จุด A และจุด B ห่างกัน $2 - (-2) = 4$ หน่วย

$\overline{CD}$ เป็นด้านคู่ขนานบนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จึงมีความยาวเท่ากับ $\overline{AB}$ ซึ่งเท่ากับ 4 หน่วย

จุด D อยู่บนแกน Y แสดงว่า $x = 0$

จุด C อยู่ห่างจากจุด D 4 หน่วย แสดงว่า $x = 4$ จะได้ $y = \frac{4^2}{2} = 8$

ดังนั้น พิกัดของจุด C คือ (4, 8)