

คู่มือเรียน - เตรียมสอบ
วิชาคณิตศาสตร์
ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย



ตั้งใจท้อแท้ คณิตศาสตร์ ม.4-5-6

สรุปแนวคิดและเรียนรู้เทคนิคใหม่ๆ
ในการทำโจทย์วิชาคณิตศาสตร์ให้ได้คะแนนสูง
สำหรับเตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัยและเพิ่มคะแนนตลอดปีการศึกษา
พร้อมรวบรวมและ Update ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์
ที่ออกสอบบ่อยที่สุดในทุกสนามสอบทั่วประเทศ



รัชศุมารินทร์ พิศาลภักทกิจ (ครูแอฟ)
ปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ตัวเต๋อพิเศษวิชาคณิตศาสตร์ให้กับโรงเรียนชั้นนำทั่วประเทศ

195.-

ศัณ្ទីរ

คณิตศาสตร์  ม.4-5-6

ตีโจทย์แตก คณิตศาสตร์ ม.4-5-6

หมายเลขหนังสือ ISBN	978-616-449-055-0
ผู้เขียน	อัญศุมารินทร์ พิศาลภทกรกิจ
บรรณาธิการ	นิกข์นิภา สหัสโยธิน
บรรณาธิการบริหาร	กรภัทร์ สุทธิคารา
ศิลปกรรมปก	วินัสสา ปั่นจาด
ศิลปกรรมรูปเล่ม	ชลนภา วัชรภรณ์
พิสูจน์อักษร	เจ้าขา
เทคนิคการผลิต	วรพล ณธิกุล, ฉัตรชนก แก้วจันทร์, ปฐมพล ธรรมศรีสกุล, มงคล แก้วพลอย
พิมพ์ครั้งที่ 1	มกราคม 2561
ราคา	195 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

อัญศุมารินทร์ พิศาลภทกรกิจ.

ตีโจทย์แตกคณิตศาสตร์ ม.4-5-6.-- นนทบุรี : อิงค์ ปิยอนด์ บุ๊คส์, 2561.

192 หน้า.

1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). I. ชื่อเรื่อง.

510.76

ISBN 978-616-449-055-0

สร้างสรรค์โดย



บริษัท อิงค์ ปิยอนด์ บุ๊คส์ จำกัด

เลขที่ 200 หมู่ 4 ชั้น 19 ห้อง 1903A

จัสมินอินเตอร์เนชั่นแนลทาวเวอร์ ถนนแจ้งวัฒนะ

ตำบลปากเกร็ด อำเภอปากเกร็ด จังหวัดนนทบุรี 11120

โทรศัพท์ 0 2962 1081, 0 2962 2626 (อัตโนมัติ 10 คู่สาย)

โทรสาร 0 2962 1084

www.thinkbeyondbook.com

จัดจำหน่ายโดย

บริษัท ไอคี่พี พรีเมียร์ จำกัด

เลขที่ 200 หมู่ 4 ชั้น 19 ห้อง 1901 จัสมินอินเตอร์เนชั่นแนลทาวเวอร์

ถนนแจ้งวัฒนะ ตำบลปากเกร็ด อำเภอปากเกร็ด จังหวัดนนทบุรี 11120

โทรศัพท์ 0 2962 1081, 0 2962 2626 (อัตโนมัติ 10 คู่สาย) จันทร์-ศุกร์ 09.00-17.30 น.

โทรสาร 0 2962 1084

สมาชิกสัมพันธ์ โทรศัพท์ 0 2962 1081-3, 0 2962 2626 ต่อ 706 - 714

สำหรับร้านค้าและตัวแทนจำหน่าย โทรศัพท์ 0 2962 1081, 0 2962 2626 ต่อ 112 - 114 โทรสาร 0 2962 1084

จากใจนักเขียน



ขึ้นชื่อว่าวิชา "คณิตศาสตร์" แค่นี้ก็ย่นชื่อวิชานักเรียนบางคนถึงกับเอามือกุมขมับกันเลยทีเดียว แต่ถึงจะหนักยังงี้ก็คงหนีวิชานี้ไม่พ้นเพราะนอกจากที่ต้องใช้สำหรับอัปเกรดในโรงเรียนแล้ว คณิตศาสตร์จัดเป็นวิชาสาระพื้นฐานสำหรับนักเรียนที่จะสอบเข้าในระดับอุดมศึกษาไม่ว่าจะเป็น เด็กสายวิทย์หรือเด็กสายศิลป์ ก็ต้องเรียนและนำความรู้ไปสอบกันเกือบทุกคน

หนังสือเล่มนี้จึงเป็นหนังสือที่เด็กๆ ม.ปลายควร必读ไว้กับตัวสำหรับประกอบการเรียนเลขหลักหรือเลขพื้นฐาน ไม่ว่าจะเป็นเด็กสายวิทย์ สายศิลป์ ภาษา สายศิลป์คำนวณ สามารถอ่านทำความเข้าใจได้ด้วยตัวเองก่อนการเรียนในห้องเรียนได้เลย เพราะถ้าเราเริ่มเตรียมตัวเร็วเท่าไร เส้นชัยก็ยิ่งเข้าใกล้เรามากขึ้นเท่านั้น

ท้ายที่สุดนี้ หน้าตาของผู้เขียนนั้นได้จบแล้ว แต่หน้าที่ของผู้เรียนนั้นเพิ่งเริ่มต้น ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผู้อ่านจะได้นำเอาความรู้ที่อยู่ในหนังสือเล่มนี้เป็นอาวุธออกไปฟาดฟันกับข้อสอบมหาโหดและคู่แข่งที่ทรงพลัง ไม่มีสงครามใดไม่มีการสูญเสีย แต่ถ้ารู้เขารู้เรารบร้อยครั้งก็ชนะร้อยครั้ง การเตรียมตัวสอบก็เช่นกัน ถึงจะไม่ได้เต็มร้อยทุกครั้ง แต่เข้าใกล้หนึ่งร้อยเท่าไร ก็คือใจเหมือนลูกหวายแล้วจริงไหม???

คำขอบคุณ

หนังสือ "ติโจทย์แตก คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6"

ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยผู้เขียนได้รับแรงบันดาลใจจากบุคคลหลายฝ่าย และที่สำคัญได้รับอนุมัติเห็นชอบให้จัดทำขึ้นจากสำนักพิมพ์ "Think Beyond" ขอขอบพระคุณคุณครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสายธรรมจันทร์ จังหวัดราชบุรีทุกท่านที่เป็นผู้สร้างทัศนคติที่ดีเกี่ยวกับการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ขอขอบพระคุณคณะอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ที่เป็นผู้สิทธิ์ีประสาทวิชาคณิตศาสตร์และคอยให้คำปรึกษาเมื่อพบปัญหาข้อสงสัยต่างๆ สำหรับลูกศิษย์คนนี้ โดยเฉพาะท่านอาจารย์วินทร์ ยังน้อย อาจารย์ที่ปรึกษาในระดับปริญญาตรีและท่านอาจารย์ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิริจันทร์ เวสารัชชศาก อาจารย์ผู้คุมสอบสัมภาษณ์เข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาและท่านเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิชาสามัญที่ได้ให้โอกาสและคอยให้คำปรึกษา ให้ทักษะกระบวนการคิด และอื่นๆ อีกหลายประการเกี่ยวกับแง่มุมที่คืในทางคณิตศาสตร์ ขอขอบคุณเพื่อนๆ และครอบครัวที่มีส่วนในการผลักดันและคอยให้กำลังใจตลอดมา ซึ่งผู้จัดทำซาบซึ้งในความกรุณาอันยิ่งใหญ่จากท่าน และขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

ธัญศุมารินทร์ พิศาลภทกรกิจ

ประวัตินักเขียน

ธัญศุมารินทร์ พิศาลภทกรกิจ (ครูแอฟ)

ปริญญาตรี วท.บ. สาขาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ประสบการณ์

ทีมติวเตอร์และวิทยากร ด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์

ปัจจุบัน

เป็นติวเตอร์พิเศษวิชาคณิตศาสตร์ให้กับโรงเรียนชั้นนำทั่วประเทศ

ใช้หนังสือเล่มนี้อย่างไร ให้เกิดประโยชน์สูงสุด



ภายในคำภีร์เล่มนี้มีอะไรซ่อนอยู่บ้าง

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

คำภีร์เล่มนี้ได้ซ่อนเคล็ดลับวิชาจากหลายหลายสำนักเอาไว้ รวมเป็นสุดยอดวิชาทางคณิตศาสตร์ที่เอาไว้ปราบข้อสอบให้อยู่หมัด จอมยุทธ์ทั้งหลายที่สนใจไม่จำเป็นเลยที่ต้องมีกำลังภายในทางเลขที่แข็งแกร่งขอเพียงพกเอาความอด ความถึก ความอดทน ความเอาใจใส่ และการมีหัวใจที่เป็นนักสู้มาก็พอ เพราะภายในคำภีร์เล่มนี้ได้รวบรวมเนื้อหาของคณิตศาสตร์พื้นฐาน ระดับ ม.ปลาย ไว้อย่างครบถ้วนทั้งสูตรโดยตรง สูตรลัด ตัวอย่างเทคนิคการวิเคราะห์โจทย์เพื่อให้ได้คำตอบมาโดยง่ายและเป็นขั้นเป็นตอน แบบฝึกหัด และเฉลยแบบฝึกหัดที่ละเอียดแบบสุดๆ ไปเลย คนที่เคยคิดว่าเลขยากจะกลับคำพูดเป็นว่า "โห เลขอะนะ ชิวๆ" กันเลยทีเดียว

ภายในคำภีร์เล่มนี้ถูกคิดค้นมาเพื่อใคร

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

คำภีร์เล่มนี้ถูกคิดค้นมาเพื่อจอมยุทธ์ทั้งหลาย ทั้งสายวิทย์ สายศิลป์คำนวณ และสายศิลป์ภาษาเลย เพราะสำหรับเหล่าจอมยุทธ์ ม.ปลายทั้งหลายคงได้ประลองกับเจ้าเลขพื้นฐานนี้แน่นอน โดยสำหรับคนที่คิดจะเริ่มต้นและตั้งใจเอาจริงเอาจังกับวิชานี้ คำภีร์เล่มนี้จะเหมาะมากเพราะเนื้อหาภายในมีความละเอียดมาก ก.ไก่ล้านตัว เขาเป็นว่าละเอียดแบบเข้าถึงทุกอนุของแก่นความเป็นคณิตศาสตร์พื้นฐานเลยทีเดียว หรือน้องๆ ม.ต้นที่กำลังเตรียมตัวเพื่อเข้าศึกษาต่อใน ม.ตอนปลายก็สามารถเลือกคำภีร์เล่มนี้มาสร้างความเป๊ะให้กับทักษะการคิดเลขได้เลย รับรองว่าเปิดเทอมขึ้น ม.4 เมื่อใดเกรทวิชานี้สวยงามแน่นอน

ใช้คำภีร์เล่มนี้อย่างไรให้เกิดประโยชน์สูงสุด

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

เนื่องจากเนื้อหาแบ่งออกเป็น 9 บท ซึ่งแต่ละบทจะถูกจัดสรรให้เรียนในแต่ละเทอม ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับโครงสร้างหลักสูตรของแต่ละโรงเรียน โดยเนื้อหาของแต่ละบทจะถูกจัดออกเป็นหัวข้อ และบางหัวข้อก็จะมีหัวข้อย่อยๆ ลึกลงไปตามแต่เนื้อหา ซึ่งในแต่ละหัวข้อหรือหัวข้อย่อยจะมีตัวอย่างให้ผู้อ่านได้เรียนรู้ว่า ถ้าหัวข้อนี้โจทย์ที่มักจะเจอบ่อยๆ จะมาประมาณไหน ซึ่งก็ต้องเอาไปประยุกต์ใช้ให้ได้เพราะโจทย์ที่จะเจอจริงๆ มันอาจจะไม่ได้เหมือนกับตัวอย่างทุกถ้อยคำครอบคลุมทุกตัวอักษรเลยทีเดียว แต่อาจจะได้นำบางส่วนของตัวอย่างที่ได้รวบรวมไว้ให้ก็เป็นไปได้นะ ยิ่งอ่านมาก ฝึกทำโจทย์มากยิ่งได้เปรียบนะ บอกเลย!!!

Part 1 : สรุปเนื้อหา และตัวอย่างข้อสอบ

6

บทที่ 1 เซต

7

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

24

บทที่ 2 การให้เหตุผล

27

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

31

บทที่ 3 จำนวนจริง

37

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

54

บทที่ 4 เลขยกกำลัง

56

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

62

บทที่ 5 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

64

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

79

บทที่ 6 ลำดับและอนุกรม

81

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

89

บทที่ 7 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

91

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

96

บทที่ 8 ความน่าจะเป็น

98

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

110

บทที่ 9 สถิติ

112

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9

124

Part 2 : แนวข้อสอบท้ายเล่ม

127

เฉลย

133

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

134

เฉลยแนวข้อสอบท้ายเล่ม

179



PART 1

สรุปเนื้อหา และ
ตัวอย่างข้อสอบ



บทที่ 1 เซต (Set)

ความหมายของเซต

สำหรับนักคณิตศาสตร์แล้วถือว่าเซตเป็น "คำนิยาม" ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะใช้เซตเพื่อบ่งบอกถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆ โดยจะต้องทราบว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มหรือไม่อยู่ในกลุ่มนั้นบ้าง ซึ่งสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการเขียนเซต คือ วงเล็บปีกกา ($\{ \}$) และใช้เครื่องหมายจุลภาค (comma $,$) เขียนคั่นสมาชิกแต่ละตัว เช่น

- เซตของสระในภาษาอังกฤษ เขียนแทนด้วย $\{a, e, i, o, u\}$
- เซตของจำนวนเต็มระหว่าง 4 กับ 10 เขียนแทนด้วย $\{5, 6, 7, 8, 9\}$
- เซตของชื่อภาษาไทยของวันใน 1 สัปดาห์ เขียนแทนด้วย $\{\text{วันจันทร์, วันอังคาร, วันพุธ, วันพฤหัสบดี, วันศุกร์, วันเสาร์, วันอาทิตย์}\}$

รู้ไว้...จำให้แม่น

ถ้าบอกไม่ได้แน่นอนว่ามีสิ่งใดบ้างอยู่หรือไม่อยู่ในกลุ่มจะไม่เรียกว่า เซต นะจะ

การเขียนเซต

การเขียนเซตโดยทั่วไปนั้นจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ $A, B, C, D, \dots, Z$ แทนชื่อเซต ซึ่งการเขียนเซตนั้นอาจเขียนได้ 2 แบบ คือ

- 1) แบบแจกแจงสมาชิก คือ เขียนให้เห็นชัดเจนเลยว่ามียะไรบ้างอยู่ในเซตนั้นๆ
- 2) แบบบอกเงื่อนไข คือ เขียนเป็นประโยคคำพูด คำจำกัดความ หรือสัญลักษณ์ต่างๆ

ตัวอย่างการเขียนเซต	
เขียนแบบแจกแจงสมาชิก	เขียนแบบบอกเงื่อนไข
$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	เซตของจำนวนเต็มระหว่าง -3 กับ 3
$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$	เซตของจำนวนนับ
$\{2, 4, 6, 8, 10\}$	$\{x \mid x = 2n; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{2, 4, 6, 8, 10\}$	$\left\{x \mid x = \frac{k}{5}; k = 10, 20, 30, 40, 50\right\}$

หมายเหตุ

ในเซตใด ๆ ที่มีสมาชิกซ้ำกันให้เขียนแค่ตัวเดียวและสามารถเขียนสลับกันได้ เช่น

$A = \{1, 0, 2, 3, 4, 4, 6, 0, 0, 1, 4, 8, 0\}$ เขียนเป็น $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

เอกภพสัมพัทธ์

เอกภพสัมพัทธ์ (Relative Universe) คือ เซตที่กำหนดขึ้นเพื่อใช้เป็นขอบเขตที่จะพิจารณา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ U โดยมีข้อตกลงว่า ถ้ากล่าวถึงสมาชิกของเซตใดๆ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จะไม่กล่าวถึงสิ่งอื่นที่ไม่ใช่สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ แต่ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดเอกภพสัมพัทธ์มาต้องรู้ว่า คือ เซตของจำนวนจริง

Ex. กำหนดให้ U คือ เซตของจำนวนจริง และ $A = \{x \mid x^2 = 9\}$ จะได้ว่า $A = \{-3, 3\}$
แต่ถ้ากำหนด U คือ เซตของจำนวนเต็มบวก $A = \{3\}$

ประเภทของเซต

ประเภทของเซตเมื่อแบ่งตามจำนวนสมาชิก แบ่งออกเป็น 2 ประเภท

- 1) **เซตจำกัด (Finite Set)** คือ เซตที่บอกจำนวนสมาชิกได้
- 2) **เซตอนันต์ (Infinite Set)** คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกมากมายนับไม่ถ้วน

Ex. 1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ A เป็นเซตจำกัด เพราะสามารถนับสมาชิกได้ 4 ตัว
2. $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ B เป็นเซตอนันต์ เพราะไม่รู้ว่ามีสมาชิกตัวสุดท้ายในเซตคืออะไร ทำให้นับจำนวนสมาชิกไม่ได้

คำถามขำๆ ระวังออกสอบ

เซตของเม็ครถรายบนโลกนี้เป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์ ???

ตอบ เป็นเซตจำกัดนะคร้า เพราะมันสามารถนับได้นะว่ามีกี่เม็คร
(ไม่เชื่อไปนับนับดูนะคร้า ออิอิ)

เซตว่าง

บทนิยาม

เซตว่าง (Empty Set) คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกเลยยยยยยยยย
หรือมีสมาชิกเท่ากับ 0 ตัว เขียนแทนด้วย ϕ หรือ $\{\}$

โปรกระทรวง

$\emptyset$ ไม่เหมือนกับ $\{\emptyset\}$ นะคะ เพราะ $\emptyset$ คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกเลย แต่ $\{\emptyset\}$ มีสมาชิก 1 ตัว คือ $\emptyset$

คำถามไม่ผ่านะ ชีเรียส!

เซตว่างเป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์ ???

ตอบ เซตว่างเป็นเซตจำกัดค่ะ เพราะสามารถนับสมาชิกได้ 0 ตัวนะคะพี่น้องง

ตัวอย่างเซตที่ควรรู้จัก

R	ใช้แทน	เซตของจำนวนจริง
R⁺	ใช้แทน	เซตของจำนวนจริงบวก
R⁻	ใช้แทน	เซตของจำนวนจริงลบ
I	ใช้แทน	เซตของจำนวนเต็ม เช่น $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
I⁺	ใช้แทน	เซตของจำนวนเต็มบวก เช่น $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
I⁻	ใช้แทน	เซตของจำนวนเต็มลบ เช่น $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
N	ใช้แทน	เซตของจำนวนนับ เช่น $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
P	ใช้แทน	เซตของจำนวนเฉพาะ เช่น $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$
Q	ใช้แทน	เซตของจำนวนตรรกยะ
Q'	ใช้แทน	เซตของจำนวนอตรรกยะ

★ รู้ไว้ใช่ว่า ใส่บ่าแบกหาม ★

1. เซตของจำนวนจริงนั้นรวมทศนิยมด้วย
2. เซตของจำนวนเต็มบวกเป็นฝาแฝดกับเซตของจำนวนนับ
- *3. จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้ โดยที่เศษและส่วนเป็นจำนวนเต็ม
- *4. จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้ โดยที่เศษและส่วนเป็นจำนวนเต็ม
- *5. จำนวนตรรกยะและอตรรกยะสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ในบทจำนวนจริง
6. เซตเท่ากัน

Part 1 : สรุปเนื้อหาและตัวอย่างข้อสอบ

บทนิยาม

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ

เซต A เท่ากับเซต B (เขียนแทนด้วย $A = B$) ก็ต่อเมื่อ

เซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว หรือ $\{ \}$

Ex. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 1\}$, $C = \{1, 2\}$ จะสรุปได้ว่า $A = B$

★ รู้ไว้สักนิด ★

เซตที่เทียบเท่ากันสำหรับเซตจำกัด คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

สำหรับเซตอนันต์ คือ เซตที่สามารถจับคู่สมาชิกกันแบบหนึ่งต่อหนึ่งได้

Ex. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{1, 3\}$ จะสรุปได้ว่า A เทียบเท่ากับ B

สมาชิกของเซต

สัญลักษณ์ $\in$ แทนการเป็นสมาชิก และใช้ $\notin$ แทนการไม่เป็นสมาชิก

Ex. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จะได้ว่า $1 \in A$, $2 \in A$ และ $5 \notin A$

สับเซตหรือเซตย่อย

สับเซต (Subset) คือ เซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากการสร้างเซตใหม่จากเซตสมาชิกของเซตเดิม

บทนิยาม

เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวที่อยู่ในเซต A ต้องเป็นสมาชิกของเซต B

ถ้า A เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$

ถ้า A ไม่เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \not\subset B$

วิธีการหาสับเซตแบบง่ายๆ

Ex.

1. กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ จะหาสับเซตได้ดังนี้

สมาชิก 0 ตัว : ϕ

สมาชิก 1 ตัว : $\{1\}, \{2\}$

สมาชิก 2 ตัว : $\{1, 2\}$

สรุป สับเซตของ A คือ $\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

2. กำหนดให้ $B = \{a, b, c\}$ จะหาสับเซตได้ดังนี้

สมาชิก 0 ตัว : ϕ

สมาชิก 1 ตัว : $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

สมาชิก 2 ตัว : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

สมาชิก 3 ตัว : $\{a, b, c\}$

สรุป สับเซตของ B คือ $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

3. กำหนดให้ $C = \{1, 2, 3, 4\}$ จะหาสับเซตได้ดังนี้

สมาชิก 0 ตัว : ϕ

สมาชิก 1 ตัว : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

สมาชิก 2 ตัว : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$

สมาชิก 3 ตัว : $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$

สมาชิก 4 ตัว : $\{1, 2, 3, 4\}$

สรุป สับเซตของ C คือ $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\},$
 $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$

Part 1 : สรุปเนื้อหาและตัวอย่างข้อสอบ

คุณสมบัติของสับเซตที่ควรทราบ

1. $\emptyset$ เป็นสับเซตของทุก ๆ เซต
2. เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเองและเรียกว่า สับเซตไม่แท้
3. สับเซตแท้ คือ สับเซตที่ไม่ใช่ตัวเอง
4. ถ้า A เป็นเซตจำกัด จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A = $2^{n(A)}$ ส่วนจำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของ A = $2^{n(A)} - 1$
เมื่อ $n(A)$ คือ จำนวนสมาชิกใน A
5. $A \subset B$ และ $B \subset A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$
6. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

★ ถ้าไม่อ่านแล้วจะเสียใจไปตลอดชีวิตดด..... ★

สำหรับการพิจารณาการเป็นสมาชิกและการเป็นสับเซตนั้นในบางครั้งอาจเกิดความงงได้ง่าย แต่ไม่ต้องกลัวนะ มีเทคนิคดีๆ ให้เอาไปใช้กัน

- สำหรับการเป็นสมาชิก จะเรียกสิ่งที่อยู่ทางซ้ายมือว่าก่อน ให้ดูเลยว่าก่อนทางซ้ายอยู่ในเซตทางขวาไหม ถ้าเป็นสมาชิกของเซตทางขวาก็แสดงว่า ก่อนนั้นเป็นสมาชิกของเซตทางขวา

- สำหรับการดูสับเซตแบ่งเป็น 2 ขั้นดังนี้

1) เรียกสิ่งที่อยู่ทางซ้ายมือว่าก่อน และก่อนที่ว่าจะต้องเป็นเซตก่อน เช่น $\{1\}$, $\{1, 2\}$ แต่ถ้าทางซ้ายมันไม่เป็นเซต เช่น 1 , a ให้ตอบเลยว่าไม่เป็นสับเซตแน่นอนละ ระวัง $\emptyset$ เป็นเซตนะและเป็นสับเซตของทุกๆ เซตด้วยจากคุณสมบัติ

2) จากข้อ 1) ถ้าก่อนทางซ้ายเป็นเซต จะดูว่าสมาชิกที่อยู่ในก่อนทางซ้ายอยู่ในเซตทางขวาไหม ถ้าสมาชิกทุกตัวที่อยู่ในก่อนทางซ้ายอยู่ในเซตทางขวาก็แสดงว่า ก่อนนั้นเป็นสับเซตของเซตทางขวา

Ex.

กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e\}$

- | | |
|-------------------------|---|
| 1. $0 \in A$ | เพราะ 0 อยู่ใน A |
| 2. $\{0\} \notin A$ | เพราะ $\{0\}$ ไม่อยู่ใน A |
| 3. $\{1, a\} \subset A$ | เพราะ ก่อนทางซ้ายเป็นเซต และ 1 กับ a อยู่ใน A |
| 4. $d \not\subset A$ | เพราะ ก่อนทางซ้ายไม่เป็นเซต |

เซตกำลัง

บทนิยาม

กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ เพาเวอร์เซต (Power Set) ของเซต A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$

รูปแบบเข้าใจยาก $P(A)$ คือ เซตที่บรรจุ x และ x เป็นสับเซตของ A [$P(A) = \{x \mid x \subset A\}$]
 รูปแบบง่าย ๆ $P(A)$ คือ เซตที่บรรจุสับเซตทั้งหมดของ A ไว้

Ex. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา $P(A)$

วิธีทำ

- หาสับเซตทั้งหมดของ A
 สับเซตทั้งหมดของ A ได้แก่ $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$
 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$
- ใส่ปีกกาคลุมสับเซตทั้งหมดของ A นั่นคือ $P(A)$
 ดังนั้น $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\},$
 $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

ข้อควรทราบ

กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ

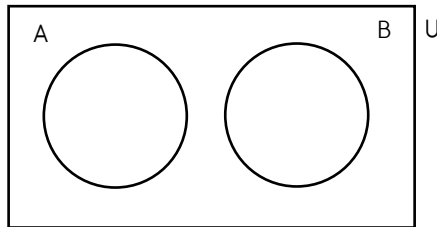
- $\phi \in P(A)$
- $A \in P(A)$
- $P(A) \neq \phi, n(P(A)) \neq 0$
- $n(P(A)) = 2^{n(A)}$
- $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subset P(B)$
- $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
- $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

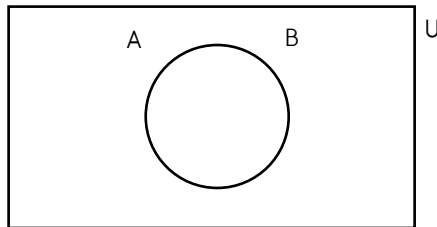
แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ (Venn-Euler Diagrams) เป็นแผนภาพที่นำมาเพื่อช่วยแสดงความสัมพันธ์กันของเซตต่างๆ ซึ่งมีความสำคัญเป็นอย่างมากในการหาจำนวนสมาชิกของเซต ซึ่งแผนภาพดังกล่าวถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดย John Venn นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ และ Leonhard Euler นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ และได้ใช้ชื่อของท่านทั้งสองมาตั้งเป็นชื่อของแผนภาพเพื่อเป็นการให้เกียรติ โดยหลักการของแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์นั้น จะใช้รูป "สี่เหลี่ยมมุมฉาก" แทนเอกภพสัมพัทธ์ และใช้รูปปิดแทนเซตใดๆ ซึ่งรูปปิดดังกล่าวนิยมใช้ "รูปวงกลม"

การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต A กับเซต B ในกรณีต่างๆ ด้วยแผนภาพ

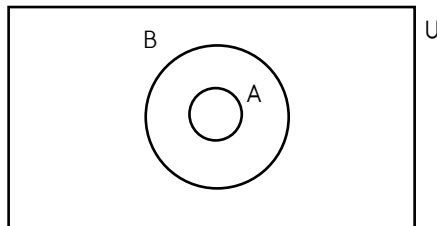
กรณีที่ 1 เซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย ($A \cap B = \emptyset$)



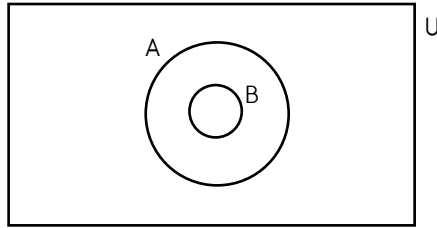
กรณีที่ 2 เซต A เท่ากับเซต B ($A = B$)



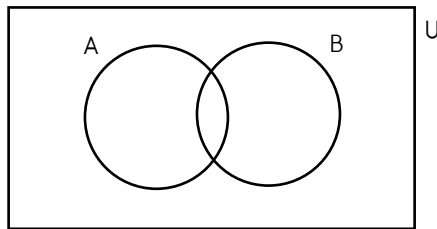
กรณีที่ 3 เซต A เป็นสับเซตของเซต B และ $A \neq B$ ($A \subset B$)



กรณีที่ 4 เซต B เป็นสับเซตของเซต A และ $A \neq B$ ($B \subset A$)



กรณีที่ 5 เซต A และเซต B มีสมาชิกซ้ำกันบ้าง ($A \cap B \neq \emptyset$ และ $A \neq B$)



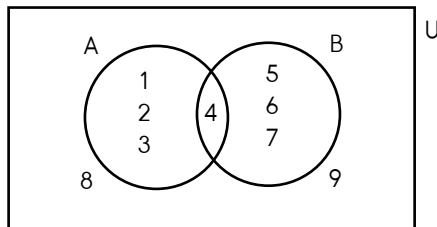
Ex.

จงเขียนเซตที่กำหนดมาให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้แทนด้วยแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

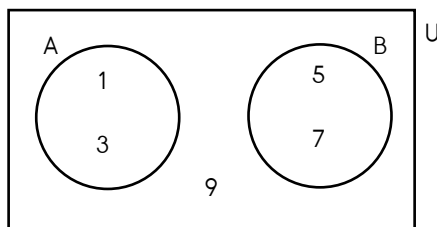
$B = \{4, 5, 6, 7\}$



2. $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A = \{1, 3\}$

$B = \{5, 7\}$



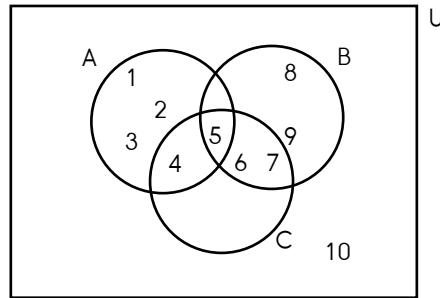
Part 1 : สรุปเนื้อหาและตัวอย่างข้อสอบ

$$3. U = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 10\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

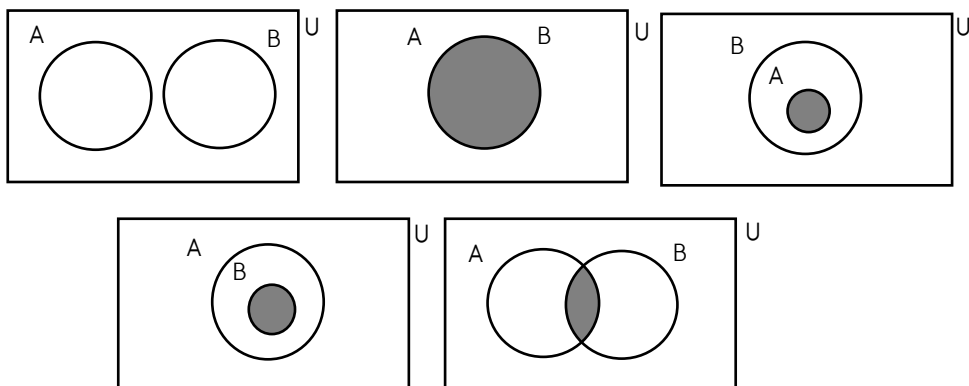


การดำเนินการของเซต (Operation of Set)

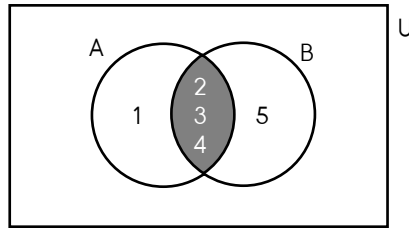
กำหนดให้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์ โดยมี A และ B แทนเป็นเซตใดๆ

• อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

อินเตอร์เซกชันเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $\cap$ " โดย $A \cap B = \{x | x \in A \text{ และ } x \in B\}$ พูดย่อๆ คือ เอาสมาชิกส่วนที่ซ้ำกัน $A \cap B$ สามารถแสดงด้วยแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้ *** ส่วนที่แรเงา คือ คำตอบ***

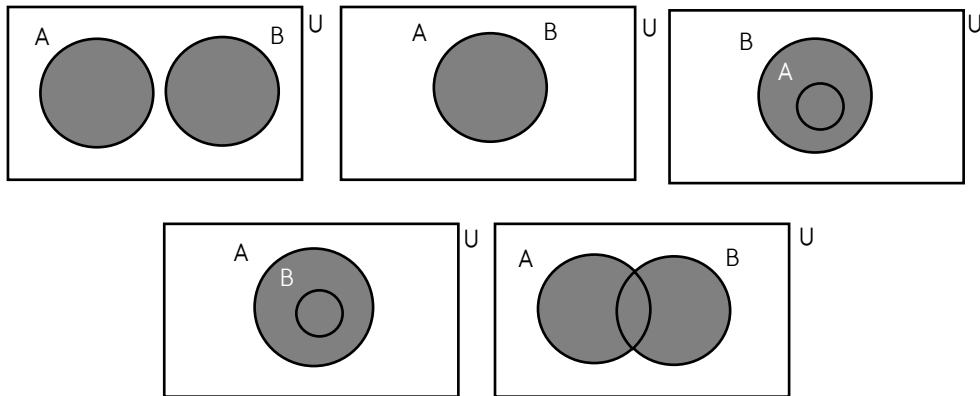


Ex. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ จะได้ว่า $A \cap B = \{2, 3, 4\}$

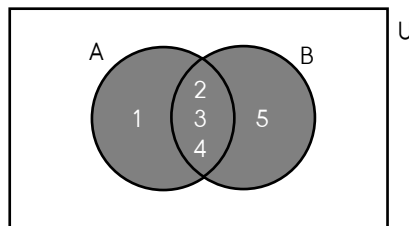


• ยูเนียน (Union)

ยูเนียนเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $\cup$ " โดย $A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$ พูดย่อๆ คือ เอาสมาชิกมารวมกัน
 $A \cup B$ สามารถแสดงด้วยแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้ *** ส่วนที่แรเงา คือ คำตอบ***



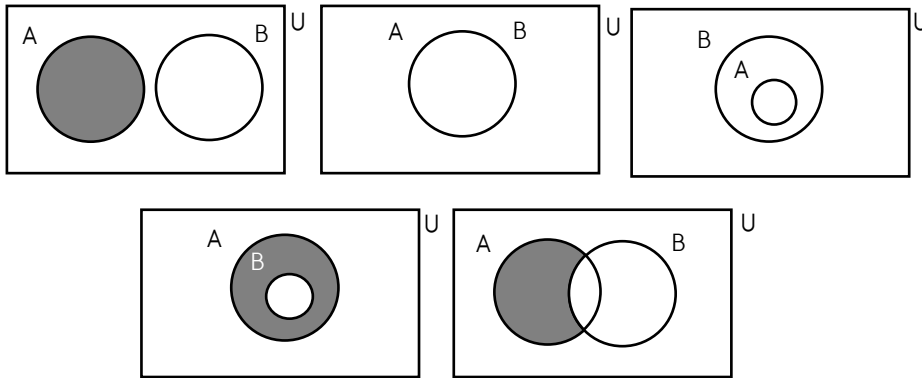
Ex. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ จะได้ว่า $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Part 1 : สรุปเนื้อหาและตัวอย่างข้อสอบ

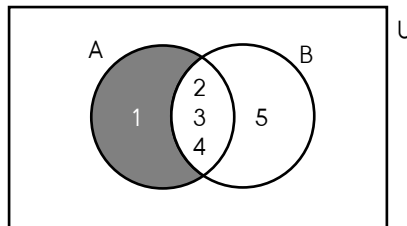
• ผลต่าง (Difference)

ผลต่างเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " - " โดย $A - B = \{x | x \in A \text{ และ } x \notin B\}$ พูดย่อๆ คือ เอาสมาชิก ส่วนที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B $A - B$ สามารถแสดงด้วยแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้ *** ส่วนที่แรเงา คือ คำตอบ***



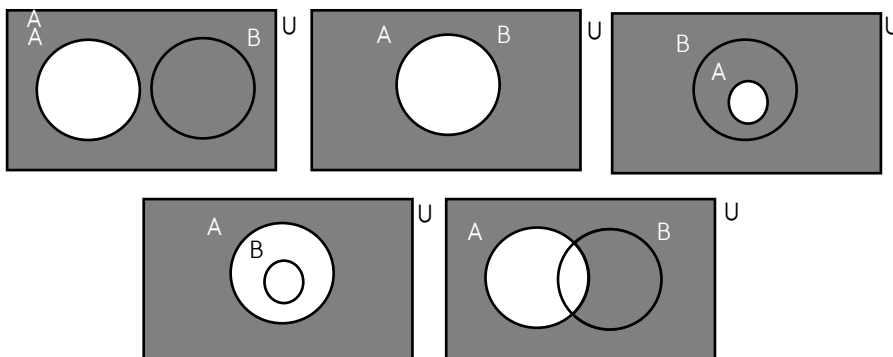
Ex.

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ จะได้ว่า $A - B = \{1\}$

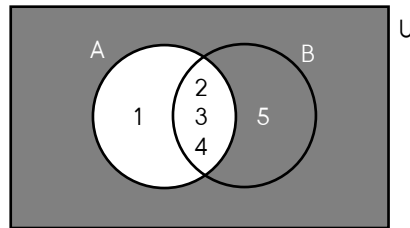


• คอมพลีเมนต์ (Complement)

คอมพลีเมนต์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " ' " โดย $A' = \{x | x \in U \text{ และ } x \notin A\}$ พูดย่อๆ คือ เอาสมาชิก ส่วนที่อยู่ใน U แต่ไม่อยู่ใน A A' สามารถแสดงด้วยแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้ *** ส่วนที่แรเงา คือ คำตอบ***



Ex. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ จะได้ว่า $A' = \{5\}$



การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด สามารถทำได้ 2 วิธี ได้แก่

1) การหาจำนวนสมาชิกโดยใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

2) การหาจำนวนสมาชิกโดยใช้สูตร

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{ใช้สำหรับเซต 2 เซต}$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad \text{ใช้สำหรับเซต 2 เซต}$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \text{ใช้สำหรับเซต 3 เซต}$$

• กรณีเซต 2 เซต

Ex. กำหนดให้ $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{8, 10, 12, 14, 16\}$ จงหา $n(A \cup B)$ แบบใช้สูตรและแบบใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

วิธีทำ จากสูตร $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

จากโจทย์ $n(A) = 6$, $n(B) = 5$, $n(A \cap B) = 2$

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 6 + 5 - 2 \\ &= 9 \end{aligned}$$