

แนวข้อสอบ

คณิตศาสตร์ สอวน.

ค่าย 2

พีชคณิตโอลิมปิกวิชาการ

อัปเดต
ปัจจุบัน
ทันสมัยล่าสุด
ครบถ้วน
สมบูรณ์

แนวข้อสอบทางคณิตศาสตร์

เพื่อเพิ่มทักษะและศักยภาพอันสูงให้กับนักเรียนได้เตรียมความพร้อม
ก่อนเข้าสอบแข่งขันทางวิชาคณิตศาสตร์ระดับประเทศ เพื่อเข้าสู่ สอวน. ค่าย 2
และเข้าสู่ค่าย สสวท. สู่การแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระดับชาติ

สารบัญ

โครงสร้างข้อสอบ เพื่อคัดเลือกนักเรียนเข้าค่าย 2 วิชาคณิตศาสตร์

7

การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์	10
ทฤษฎีจำนวน	32
แคลคูลัส	50
คอมบินาทอริกและความน่าจะเป็น	74
เรขาคณิต	95
พีชคณิต	112

แนวข้อสอบ	136
------------------	------------

แนวข้อสอบ ชุดที่ 1	137
แนวข้อสอบ ชุดที่ 2	142
แนวข้อสอบ ชุดที่ 3	147
แนวข้อสอบ ชุดที่ 4	152
แนวข้อสอบ ชุดที่ 5	157
แนวข้อสอบ ชุดที่ 6	162

เฉลยแนวข้อสอบ	167
----------------------	------------

เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 1	168
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 2	173
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 3	176
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 4	182
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 5	189
เฉลยแนวข้อสอบ ชุดที่ 6	194

โครงสร้างข้อสอบ เพื่อคัดเลือกนักเรียนเข้าค่าย 2 วิชาคณิตศาสตร์

การให้คะแนนหรือรายละเอียดอื่น ๆ ค่าย 2 มักจะประกอบด้วยหลายส่วนสำคัญดังนี้

1. รูปแบบของการสอบ

- ❖ การสอบในค่าย 2 มักจะแบ่งออกเป็น 2 ประเภทหลัก คือ การสอบทฤษฎี และการสอบปฏิบัติ (ถ้ามี)
- ❖ การสอบทฤษฎีจะเน้นที่การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนและต้องใช้การวิเคราะห์อย่างลึกซึ้ง
- ❖ การสอบปฏิบัติอาจรวมถึงการทำข้อสอบภายใต้เวลาที่กำหนด หรือการแก้โจทย์ปัญหาที่ต้องใช้ทักษะในการคิดคำนวณอย่างมีระบบ

2. การให้คะแนน

- ❖ คะแนนจะถูกกำหนดตามความถูกต้อง ความสมบูรณ์ และความคิดสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหา
- ❖ มีการแบ่งคะแนนตามสัดส่วน เช่น คะแนนเต็มจากข้อสอบทฤษฎี และคะแนนจากการแก้ปัญหาปฏิบัติ
- ❖ การให้คะแนนจะมีการตรวจสอบอย่างเข้มงวดเพื่อให้เกิดความยุติธรรมและโปร่งใส

3. เกณฑ์การคัดเลือก

- ❖ นักเรียนที่มีคะแนนสูงสุดจากการสอบทฤษฎีและปฏิบัติ จะได้รับการคัดเลือกให้เข้าร่วมการแข่งขันระดับนานาชาติ
- ❖ ในกรณีที่คะแนนเท่ากัน การคัดเลือกจะพิจารณาจากผลงานในค่ายอื่น ๆ ที่ผ่านมา หรือจากเกณฑ์พิเศษที่กำหนดขึ้น

4. กฎระเบียบในการสอบ

- ❖ นักเรียนต้องปฏิบัติตามกฎระเบียบและมารยาทในการสอบอย่างเคร่งครัด เช่น ห้ามใช้เครื่องมือหรืออุปกรณ์ที่ไม่ได้รับอนุญาต
- ❖ ห้ามพูดคุยหรือขอคำปรึกษาจากผู้อื่นในระหว่างการแข่งขัน
- ❖ หากพบว่ามีพฤติกรรมหรือการกระทำที่ผิดกฎระเบียบ นักเรียนอาจถูกตัดสิทธิ์จากการสอบทันที

5. ข้อกำหนดอื่น ๆ

- ❖ การเตรียมตัวเข้าร่วมค่าย 2 รวมถึงการเข้าร่วมกิจกรรมต่าง ๆ ที่จัดขึ้นโดย สอวน.
- ❖ นักเรียนต้องมีการเตรียมตัวและฝึกฝนทักษะคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง
- ❖ การปฏิบัติตามกฎระเบียบเหล่านี้มีความสำคัญมาก เพื่อให้ให้นักเรียนทุกคนมีโอกาสที่เท่าเทียมกัน และเพื่อรักษามาตรฐานของการคัดเลือกในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิก

เนื้อหาที่ออกสอบในค่าย 2 ของ สวอน. คณิตศาสตร์ ประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

1. ทฤษฎีจำนวน (Number Theory)

- ❖ การพิสูจนตัวหารร่วมมาก (Greatest Common Divisor, GCD)
- ❖ การแก้สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine Equations)
- ❖ การแยกตัวประกอบเป็นจำนวนเฉพาะ (Prime Factorization)
- ❖ ฟังก์ชันจำนวนเต็ม เช่น ฟังก์ชันโทเทียนท์ของออยเลอร์ (Euler's Totient Function)
- ❖ การพิสูจนสมบัติเกี่ยวกับการหารลงตัว

2. เรขาคณิต (Geometry)

- ❖ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม (Circle Theorems)
- ❖ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับตรีโกณมิติ (Trigonometry) ในสามเหลี่ยม
- ❖ ความคล้าย (Similarity) และสัดส่วน (Proportionality)
- ❖ เรขาคณิตเชิงวิเคราะห์ (Analytic Geometry)
- ❖ การคำนวณพื้นที่และปริมาตรของรูปทรง

3. พีชคณิต (Algebra)

- ❖ สมการพหุนาม (Polynomials) และสมการหลายตัวแปร (Multivariable Equations)
- ❖ ระบบสมการเชิงเส้น (Linear Systems)
- ❖ ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)
- ❖ ฟังก์ชันและกราฟ (Functions and Graphs)
- ❖ พีชคณิตนามธรรม (Abstract Algebra) เบื้องต้น

4. ความน่าจะเป็นและสถิติ (Probability and Statistics)

- ❖ กฎของความน่าจะเป็น (Probability Rules)
- ❖ การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่าง ๆ (Probability Distributions)
- ❖ การหาค่าคาดหวัง (Expected Value)
- ❖ ทฤษฎีบทเบย์ (Bayes' Theorem)
- ❖ การสุ่มตัวอย่างและสมมติฐาน

5. คอมบินาทอริกส์ (Combinatorics)

- ❖ หลักการจัดเรียงและการจัดหมู่ (Permutations and Combinations)
- ❖ หลักการนับ (Counting Principles)
- ❖ การพิสูจนโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)
- ❖ ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) เบื้องต้น
- ❖ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับส่วนประกอบจำกัด (Finite Sets)

6. แคลคูลัส (Calculus)

- ❖ ลิมิตและความต่อเนื่อง (Limits and Continuity)
- ❖ อนุพันธ์ (Derivatives) และการประยุกต์ใช้งาน
- ❖ อินทิกรัล (Integrals) และการประยุกต์ใช้งาน
- ❖ แคลคูลัสเวกเตอร์ (Vector Calculus) เบื้องต้น

7. การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Proofs)

- ❖ การพิสูจน์โดยใช้วิธีขัดแย้ง (Proof by Contradiction)
- ❖ การพิสูจน์แบบก่อรูป (Constructive Proof)
- ❖ การพิสูจน์โดยใช้การหาค่าต่ำสุดและค่ามากที่สุด (Optimization Problems)
- ❖ การพิสูจน์โดยใช้สมมติฐาน (Hypothetical Proof)

8. ปัญหาเชิงโอลิมปิก (Olympiad Style Problems)

- ❖ ปัญหาที่มีความท้าทายสูง ซึ่งต้องใช้การคิดวิเคราะห์และการสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหา
- ❖ การแก้ปัญหาที่ต้องใช้หลายหัวข้อร่วมกัน

การพิสูจน์ข้อความ
ทางคณิตศาสตร์



การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ การพิสูจน์ทางตรง และการพิสูจน์ทางอ้อม

การพิสูจน์ทางตรง

1. กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่ จงพิสูจน์ว่า $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์

ให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $x = 2n + 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $x^2 + 1 = (2n + 1)^2 + 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$$= (4n^2 + 4n + 1) + 1$$

$$= 4n^2 + 4n + 2$$

$$x^2 + 1 = 2(2n^2 + 2n + 1) \text{ เมื่อ } 2n^2 + 2n + 1 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

2. กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็มคู่ จงพิสูจน์ว่า $3x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์

ให้ x เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $x = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $3x = 3(2n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$$= 6n$$

$$3x = 2(3n) \text{ เมื่อ } 3n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $3x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น $3x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

การพิสูจน์ทางอ้อม

การพิสูจน์ทางอ้อม เป็นการพิสูจน์โดยสมมติข้อความที่ต้องการพิสูจน์ให้เป็นเท็จก่อน แล้วจึงหาข้อขัดแย้งที่เกิดขึ้น

3. กำหนดให้ $x^2 - 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จงพิสูจน์ว่า x เป็นจำนวนเต็มคี่

พิสูจน์

สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $x = 2n + 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $x^2 - 1 = (2n + 1)^2 - 1$

$$= 4n^2 + 4n + 1 - 1$$

$$x^2 - 1 = 2(2n^2 + 2n) \text{ เมื่อ } 2n^2 + 2n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

โดยบทนิยามจะได้ว่า $x^2 - 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มคี่

12. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนจริงบวก x จะมีจำนวนนับ n ซึ่ง $\frac{1}{n} < x$

พิสูจน์

ให้ x เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

จะได้ว่า $\frac{1}{n}$ เป็นจำนวนจริงบวก

โดยหลักของอาร์คิมิดีส จะได้ว่า มีจำนวนนับ n ที่ $n > \frac{1}{x}$

ดังนั้น $\frac{1}{n} < x$

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $n, P(n)$

หลักเกณฑ์ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction)

กล่าวว่า ให้ $P(n)$ เป็นประโยคที่มีตัวแปร n แทน จำนวนนับใด ๆ

ถ้า 1. $P(1)$ เป็นจริง

2. $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เป็นจริง

แล้ว $\forall n, P(n)$ เป็นจริง

13. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

พิสูจน์

ให้ $P(n)$ แทน $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $1 = 1^2$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง สำหรับทุก k ที่เป็นจำนวนนับ

เนื่องจาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad \dots(1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2(k + 1) - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 2 - 1)$$

$$= 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1)$$

จาก (1) จะได้ว่า

$$= k^2 + (2k + 1)$$

เพราะฉะนั้น $1 + 3 + 5 + \dots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$

ดังนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง สำหรับทุก k ที่เป็นจำนวนนับ

จาก ข้อ 1. ข้อ 2. และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก n ที่เป็นจำนวนนับ

คอมบิเนทอริก
และความน่าจะเป็น



1. มีลูกบอลสีแดง 3 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 2 ลูก หากจะเลือกลูกบอลออกมาจำนวน 3 ลูก มีวิธีการเลือกทั้งหมดกี่วิธี

แนวคิด เลือกจากลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีน้ำเงิน โดยพิจารณาจำนวนที่เลือกได้ 3 ลูก จาก 5 ลูก ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วย $\binom{5}{3} = 10$ วิธี
ดังนั้น มีวิธีการเลือกทั้งหมด 10 วิธี

2. มีการแจกของขวัญ 4 ชิ้น ให้กับนักเรียน 6 คน แต่ละคนจะได้รับไม่เกิน 1 ชิ้น มีวิธีการแจกทั้งหมดกี่วิธี

แนวคิด สามารถเลือกนักเรียน 4 คน จาก 6 คน โดยการเลือกได้ $\binom{6}{4} = 15$ วิธี
และจัดลำดับของขวัญให้กับนักเรียนแต่ละคนได้ด้วย $4! = 24$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด คือ $15 \times 24 = 360$ วิธี
ดังนั้น มีวิธีการแจกทั้งหมด 360 วิธี

3. มีการเรียงตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6 โดยที่ตัวเลข 1 ไม่อยู่ในตำแหน่งที่ 1 มีวิธีการเรียงทั้งหมดกี่วิธี

แนวคิด วิธีการทั้งหมดในการเรียงตัวเลขทั้ง 6 ตัว คือ $6! = 720$ วิธี
แต่ต้องหาวิธีการที่เลข 1 ไม่อยู่ในตำแหน่งที่ 1 ซึ่งเป็นการหาวิธีการจัดแบบ derangements สำหรับกรณีนี้ จำนวนวิธีที่ 1 ไม่อยู่ในตำแหน่งที่ 1 สามารถใช้การลบออก ดังนั้น $5! = 120$
ดังนั้น มีวิธีการเรียงทั้งหมด 600 วิธี

4. มีนักเรียน 10 คน โดยเป็นนักเรียนหญิง 5 คน และนักเรียนชาย 5 คน ยืนเป็นแถวเรียงลำดับ หากนักเรียนหญิงยืนอยู่คนละตำแหน่งกับนักเรียนชาย มีวิธีการยืนทั้งหมดกี่วิธี

แนวคิด การจัดเรียงนักเรียนทั้งหมด คือ $5! \times 5! = 14,400$ วิธี
ดังนั้น มีวิธีการยืนทั้งหมด 14,400 วิธี

5. จงหาวิธีการแจกเหรียญ 5 เหรียญ ให้กับเด็ก 3 คน โดยแต่ละคนอาจจะได้รับเหรียญมากกว่าหนึ่งเหรียญได้

แนวคิด ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยใช้วิธี “การแจกสิ่งของไม่จำกัด” หรือวิธีการ Stars and Bars คือ
$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$
 วิธี
ดังนั้น มีวิธีการแจกเหรียญทั้งหมด 21 วิธี

6. มีตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5 ถ้าเรียงตัวเลขเหล่านี้ในลำดับต่าง ๆ ได้กี่วิธี

แนวคิด วิธีการเรียงตัวเลขทั้ง 5 ตัว คือ $5! = 120$ วิธี
ดังนั้น มีวิธีการเรียงตัวเลขทั้งหมด 120 วิธี

13. มีลูกบอลสีแดง 5 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 7 ลูก ต้องการเลือกลูกบอลทั้งหมด 5 ลูก โดยต้องเลือกทั้งลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีน้ำเงินอย่างน้อยหนึ่งลูก มีวิธีการเลือกทั้งหมดกี่วิธี

แนวคิด

วิธีการเลือกมีเงื่อนไขให้เลือกลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงินอย่างน้อย 1 ลูก สามารถแบ่งเป็นกรณีได้

เลือกลูกบอลสีแดง 1 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 4 ลูก

$$\binom{5}{1} \times \binom{7}{4} = 5 \times 35 = 175 \text{ วิธี}$$

เลือกลูกบอลสีแดง 2 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก

$$\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = 10 \times 35 = 350 \text{ วิธี}$$

เลือกลูกบอลสีแดง 3 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 2 ลูก

$$\binom{5}{3} \times \binom{7}{2} = 10 \times 21 = 210 \text{ วิธี}$$

เลือกลูกบอลสีแดง 4 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 1 ลูก

$$\binom{5}{4} \times \binom{7}{1} = 5 \times 7 = 35 \text{ วิธี}$$

รวมวิธีการทั้งหมด $175 + 350 + 210 + 35 = 770$ วิธี

ดังนั้น มีวิธีการเลือกทั้งหมด 770 วิธี

14. มีนักเรียน 8 คนที่นั่งเป็นแถวตรง ต้องการแบ่งนักเรียนเหล่านี้ออกเป็น 2 กลุ่ม แต่ละกลุ่มมี 4 คน หากต้องการให้ไม่มีใครนั่งติดกันกับสมาชิกในกลุ่มเดียวกัน มีวิธีการจัดกลุ่มทั้งหมดกี่วิธี

แนวคิด

ให้พิจารณานักเรียนที่นั่งอยู่เป็นแถว และต้องการแบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 4 คน โดยให้แต่ละกลุ่มไม่มีใครนั่งติดกัน

พิจารณาการแบ่งแถวที่มีการสลับกลุ่มแต่ละกลุ่ม โดยใช้หลักการจัดลำดับแบบสลับ

ต้องเลือกตำแหน่งสำหรับกลุ่ม 1 จำนวน 4 ตำแหน่ง

และอีก 4 ตำแหน่งที่เหลือ จะเป็นของกลุ่ม 2

การเลือกและจัดลำดับทำได้ $\binom{4}{4} \times 4! \times 4! = 24^2 = 576$ วิธี

ดังนั้น มีวิธีการจัดกลุ่มทั้งหมด 576 วิธี

15. มีคน 10 คน ต้องการแบ่งกลุ่มคนเหล่านี้ออกเป็น 3 กลุ่ม โดยกลุ่มแรกมี 4 คน กลุ่มที่สองมี 3 คน และกลุ่มที่สามมี 3 คน หากในแต่ละกลุ่มไม่มีใครอยู่ติดกัน (ในความหมายของการเรียงลำดับเป็นแถวตรง) จะมีวิธีการจัดกลุ่มทั้งหมดกี่วิธี

แนวคิด

การเลือกคนสำหรับแต่ละกลุ่ม

เริ่มจากเลือก 4 คน ที่จะอยู่ในกลุ่มแรกจากทั้งหมด 10 คน วิธีการเลือกคน 4 คน จาก 10 คน คือ $\binom{10}{4}$

จากนั้นเลือกคน 3 คน ที่จะอยู่ในกลุ่มที่สองจากคนที่เหลือ 6 คน วิธีการเลือกคน 3 คน จาก 6 คน คือ $\binom{6}{3}$

คนที่เหลือ 3 คน จะถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มที่สามโดยอัตโนมัติ ดังนั้นไม่ต้องเลือกเพิ่ม



- กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า xy เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว x หรือ y เป็นจำนวนเต็มคู่ ในการพิสูจน์สามารถใช้การพิสูจน์แบบแย้งกลับที่ โดยสมมตินิเสธของประพจน์ตัวหลัง แล้วแสดงให้ได้ว่านิเสธของตัวหน้า

กำหนดให้ นิเสธของ x หรือ y เป็นจำนวนเต็มคู่ คือ x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ และ
นิเสธของ xy เป็นจำนวนเต็มคู่ คือ xy เป็นจำนวนเต็มคี่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ก็ต่อเมื่อ x เป็นจำนวนเต็มคี่ ในการพิสูจน์ข้อความ “ก็ต่อเมื่อ” จะต้องแสดงข้อความ “ถ้า $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคี่” และแสดงข้อความ “ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่”

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ หรือ m และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้วผลบวกของ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

ในการพิสูจน์ข้อความที่เชื่อมด้วย “หรือ” ต้องสมมติ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วแสดงให้ได้ว่าผลบวกของ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ และต้องสมมติ m และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้วแสดงให้ได้ว่าผลบวกของ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว $a^2 - a + 10$ เป็นจำนวนเต็มคู่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. กำหนดให้ $f: [1, \infty) \rightarrow (-\infty, 3]$ นิยามโดย $f(x) = 3 - \sqrt{x-1}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
ทั่วถึงหรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ $8 \cdot 10^{2n} + 6 \cdot 10^{2n-1} + 9$ หารด้วย 11 ลงตัว

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



1. เฉลยละเอียด

สมมติให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $x = 2a + 1$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มคี่

และ $y = 2b + 1$ เมื่อ b เป็นจำนวนเต็มคี่

นั่นคือ

$$xy = (2a + 1)(2b + 1)$$

$$= 4ab + 2a + 2b + 1$$

$$xy = 2(2ab + a + b) + 1 \text{ เมื่อ } 2ab + a + b \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ดังนั้น xy เป็นจำนวนเต็มคี่

2. เฉลยละเอียด

ถ้า $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคี่ พิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่

สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคู่ จะแสดงว่า $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $x = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $x^2 + 1 = (2n)^2 + 1 = 4n^2 + 1 = 2(2n^2) + 1$ เมื่อ $2n^2$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่ จะแสดงว่า $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $x = 2m + 1$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $x^2 + 1 = (2m + 1)^2 + 1 = 4m^2 + 4m + 1 + 1$

$$= 4m^2 + 4m + 2$$

$$= 2(2m^2 + 2m + 1) \text{ เมื่อ } 2m^2 + 2m + 1 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ดังนั้น $x^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

3. เฉลยละเอียด

สมมติ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วแสดงให้ได้ว่า ผลบวกของ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $m = 2x$ และ $n = 2y$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $m + n = 2x + 2y = 2(x + y)$ เมื่อ $x + y$ เป็นจำนวนเต็ม

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่าผลบวกของ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

สมมติ m และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้วแสดงให้ได้ว่า ผลบวกของ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $m = 2p + 1$ และ $n = 2q + 1$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $m + n = 2p + 1 + 2q + 1 = 2(p + q + 1)$ เมื่อ $p + q + 1$ เป็นจำนวนเต็ม

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่าผลบวกของ m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ หรือ m และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว ผลบวกของ m

และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

4.

เฉลยละเอียด

ในการพิสูจน์ข้อความ “ถ้า a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว $a^2 - a + 10$ เป็นจำนวนเต็มคู่”
พิจารณา 2 กรณี คือ กรณี a เป็นจำนวนเต็มคู่ และ a เป็นจำนวนเต็มคี่

กรณีที่ 1 สมมติให้ a เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $a = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ} \quad a^2 - a + 10 &= (2m)^2 - 2m + 10 \\ &= 4m^2 - 2m + 10 \\ &= 2(2m^2 - m + 5) \text{ เมื่อ } 2m^2 - m + 5 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\end{aligned}$$

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $a^2 - a + 10$ เป็นจำนวนเต็มคู่

กรณีที่ 2 สมมติให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $a = 2n + 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ} \quad a^2 - a + 10 &= (2n + 1)^2 - (2n + 1) + 10 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 - 2n - 1 + 10 \\ &= 4n^2 + 2n + 10 \\ &= 2(2n^2 + n + 5) \text{ เมื่อ } 2n^2 + n + 5 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\end{aligned}$$

โดยบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $a^2 - a + 10$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว $a^2 - a + 10$ เป็นจำนวนเต็มคู่

5.

เฉลยละเอียด

ให้ $P(n)$ แทน $3^{2n} - 1$ หารด้วย 4 ลงตัว สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\text{เนื่องจาก } 3^{2(1)} - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 4(2)$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง สำหรับทุก k ที่เป็นจำนวนนับ

เนื่องจาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า $3^{2k} - 1$ หารด้วย 4 ลงตัว

โดยบทนิยามการหารลงตัว จะได้ว่า $3^{2k} - 1 = 4a$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม(1)

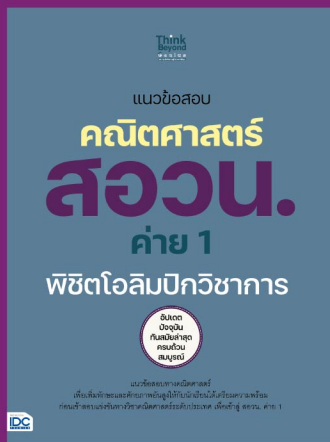
$$\begin{aligned}3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k+2} - 1 \\ &= 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 \\ &= 3^{2k}(8 + 1) - 1 \\ &= 3^{2k} \cdot 8 + 3^{2k} - 1 \\ \text{จาก (1) จะได้ว่า} \quad &= 3^{2k} \cdot 8 + 4a \\ &= 4(3^{2k} \cdot 2 + a)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $3^{2(k+1)} - 1$ หารด้วย 4 ลงตัว

แนวข้อสอบทางคณิตศาสตร์
เพื่อเสริมความเชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์
เสริมโอกาสในการเรียนรู้เนื้อหาทางวิชาการอย่างเข้มข้นกว่าหลักสูตรทั่วไป
เพื่อก้าวไปสู่ค่าย สสวท.

หนังสือเล่มนี้เสริมแนวข้อสอบคณิตศาสตร์ระดับสูง
เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกทักษะและเสริมความเชี่ยวชาญที่มากกว่าค่าย 1
เพื่อทำคะแนนได้สูงสำหรับการสอบแข่งขันในสนามสอบจริง
แนวข้อสอบที่มีความใกล้เคียงกับการสอบโอลิมปิกวิชาการระดับชาติ
ที่อยู่ในระดับค่อนข้างยาก พร้อมเฉลยอย่างละเอียด เสริมวิธีการคิดที่แบบยล
เน้นข้อสอบที่เสริมการคิด วิเคราะห์ สังเคราะห์
เพื่อเสริมศักยภาพมากที่สุด

หนังสือแนะนำ



หนังสือคู่มือเตรียมสอบ



ราคา 280 บาท



ซื้อสะดวก ส่งถึงบ้านบน Shopee และ Lazada หรือผ่านทางร้านหนังสือออนไลน์

www.thinkbeyondbook.com และ www.serazu.com



thinkbeyond books