

Up Level

MATHS

หลักคณิตศาสตร์ ม.ปลาย

สรุปเนื้อหาสมบูรณ์

พร้อมแนวข้อสอบเข้มข้น

คณิตศาสตร์ประยุกต์ * A-LEVEL * สสวท.

สรุปเนื้อหาสำคัญมาก ๆ ที่ต้องรู้ และทำได้ก่อนสอบ
ถ้าสามารถทำข้อสอบได้เกิน 70% ของแนวข้อสอบในเล่มนี้
มั่นใจได้เลยว่า...พร้อมลงสนามสอบอย่างมั่นใจ

สารบัญ

สรุปเนื้อหา เรื่องเซต

ความหมายของเซต	
วิธีการเขียนเซต	
ประเภทของเซต	
ประเภทของเซตที่เท่ากัน	
เซตย่อย	
สมบัติของเซตย่อย	
เซตกาลัง	
สมบัติของเซตกาลัง	
การดำเนินการของเซต	
สมบัติการดำเนินการของเซต	
การหาจำนวนสมาชิกของเซต	

แนวข้อสอบ เรื่องเซต

เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องเซต

สรุปเนื้อหา เรื่องตรรกศาสตร์

ความหมายของตรรกศาสตร์	
โครงสร้างของตรรกศาสตร์	
การหาค่าความจริงของประพจน์	
การสมมูลของประพจน์	
การนิเสธของประโยคเปิด	
สัจนิรันดร์	
การอ้างเหตุผล	
ข้อบกพร่องในการอ้างเหตุผล	
ประโยชน์ของวิชาตรรกศาสตร์ในชีวิตประจำวัน	

แนวข้อสอบ เรื่องตรรกศาสตร์

เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องตรรกศาสตร์

สรุปเนื้อหา เรื่องพหุนาม

เลขยกกำลัง	
เอกนาม	
พหุนาม	
ทฤษฎีบทตัวประกอบ	
ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ	
ทฤษฎีบทเศษเหลือ	
การแยกตัวประกอบของพหุนาม	
เศษส่วนพหุนาม	
สมการพหุนาม	
แนวข้อสอบ เรื่องพหุนาม	
เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องพหุนาม	

9 สรุปเนื้อหา เรื่องจำนวนจริง

9	โครงสร้างของระบบจำนวนจริง	52
9	สมบัติของจำนวนจริงที่เท่ากัน	52
9	การเขียนเส้นจำนวนจริง	53
10	สมบัติของจำนวนจริงที่ไม่เท่ากัน	53
10	ค่าสัมบูรณ์	55
10	ขั้นตอนการแก้สมการ	56
11	อสมการรูปแบบพิเศษ	59

11 แนวข้อสอบ เรื่องจำนวนจริง

11 เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องจำนวนจริง

12 สรุปเนื้อหา เรื่องความสัมพันธ์

12	ความหมายของความสัมพันธ์	68
14	ความหมายของความสัมพันธ์ผกผัน	68
15	การหาจำนวนสมาชิกของผลคูณ Cartesian	68
18	สมบัติการดำเนินการของผลคูณ Cartesian	68
25	หลักการหา Domain และ Range ที่เป็นจำนวนจริง	70
25	สมบัติการดำเนินการของความสัมพันธ์	71
26	แนวข้อสอบ เรื่องความสัมพันธ์	74
26	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องความสัมพันธ์	76

27 สรุปเนื้อหา เรื่องฟังก์ชัน

27	ความหมายของฟังก์ชัน	83
27	ประเภทของฟังก์ชัน	83
28	สมบัติของฟังก์ชัน	84
28	การดำเนินการของฟังก์ชัน	87
29	การแก้สมการเชิงฟังก์ชัน	87
32	แนวข้อสอบ เรื่องฟังก์ชัน	88
39	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องฟังก์ชัน	91

39 สรุปเนื้อหา เรื่องฟังก์ชัน Exponential และ Logarithm

39	ความหมายของฟังก์ชัน Exponential	97
39	ความหมายของฟังก์ชัน Logarithm	97
40	ความหมายของฟังก์ชัน Logarithm ธรรมชาติ	99
40	แนวข้อสอบ เรื่องฟังก์ชัน Exponential และ Logarithm	100
40	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องฟังก์ชัน Exponential และ Logarithm	102
40	สรุปเนื้อหา เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ	108
41	ความหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	108
41	กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ	109
42	สมบัติของตรีโกณมิติ	110
44	ความหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	114
	กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	114
	สมบัติของตรีโกณมิติผกผัน	115

ขั้นตอนการแก้สมการตรีโกณมิติ	119	ความเกี่ยวข้องระหว่างจุดกับรูปสามเหลี่ยม	180
ฟังก์ชันตรีโกณมิติกับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ	119	พื้นที่รูปสามเหลี่ยม	182
แนวข้อสอบ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ	120	การแปลงทางเรขาคณิต	182
เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ	122	เส้นตรง	183
สรุปเนื้อหา เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	128	แนวข้อสอบ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์สองมิติ	185
ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน	128	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์สองมิติ	188
การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน	129	สรุปเนื้อหา เรื่องภาคตัดกรวย	197
การสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน	129	วงกลม	197
ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	129	Parabola	199
ค่ามุมระหว่างแกนจริงกับเส้นที่เชื่อมจากจุดกำเนิด	130	วงรี	204
ของจำนวนเชิงซ้อน		Hyperbola	207
กราฟของจำนวนเชิงซ้อนแนวระนาบ	131	แนวข้อสอบ เรื่องภาคตัดกรวย	211
ระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว	132	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องภาคตัดกรวย	215
รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน	133	สรุปเนื้อหา เรื่องเวกเตอร์และเรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ	224
รากที่สามของจำนวนเชิงซ้อน	133	ความหมายของเวกเตอร์	224
รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน	134	ระบบพิกัดฉากสามมิติ	224
แนวข้อสอบ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	136	ชนิดของเวกเตอร์	225
เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	139	ลักษณะของเวกเตอร์	225
สรุปเนื้อหา เรื่องเมทริกซ์	148	การดำเนินการของเวกเตอร์	225
ความหมายของเมทริกซ์	148	เรขาคณิตวิเคราะห์ในเชิงเวกเตอร์	229
ชนิดของเมทริกซ์	148	การหาพื้นที่รูปเรขาคณิตด้วยวิธีเวกเตอร์	233
การบวกเมทริกซ์	149	การหาปริมาตรรูปเรขาคณิตด้วยวิธีเวกเตอร์	233
การคูณเมทริกซ์กับสเกลาร์	150	แนวข้อสอบเรื่อง เวกเตอร์และเรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ	234
การคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์	150	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องเวกเตอร์และเรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ	236
เมทริกซ์สลับเปลี่ยน	151	สรุปเนื้อหา เรื่องหลักการนับเบื้องต้น	241
เมทริกซ์สมมาตร	152	วิธีการนับเบื้องต้น	241
เมทริกซ์เสมือนสมมาตร	152	1. การจัดเรียงลำดับเชิงเส้นตรง	241
รอยเมทริกซ์	154	2. การจัดเรียงลำดับเชิงวัฏจักร	242
ค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์	155	3. การจัดเรียงหมู่	242
เมทริกซ์ผกผัน	160	4. การจัดเรียงของซ้ำ	244
เมทริกซ์เอกฐาน	163	5. การจัดแบ่งกลุ่ม	244
เมทริกซ์ไม่เอกฐาน	163	6. การจัดเรียงลำดับที่ไม่ใช่บริเวณตรงตำแหน่ง	245
การดำเนินการตามแถวของเมทริกซ์	163	สามเหลี่ยม Pascal	245
เมทริกซ์ผกผัน	163	ทฤษฎีบททวินาม	245
คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น	166	1. ปัญหาการแจกของ	246
ลักษณะคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น	168	2. หลักการเพิ่มเข้าตัดออก	247
แนวข้อสอบ เรื่องเมทริกซ์	169	3. ความสัมพันธ์	247
เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องเมทริกซ์	172	4. ฟังก์ชัน	247
สรุปเนื้อหา เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์สองมิติ	178	5. เส้นทาง	247
ระบบพิกัดฉาก	178	6. การนับเชิงเรขาคณิต	248
ระบบพิกัดเชิงขั้ว	178	แนวข้อสอบ เรื่องหลักการนับเบื้องต้น	249
จุด	178	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องหลักการนับเบื้องต้น	251
จุดบนส่วนของเส้นตรง	179		

สรุปเนื้อหา เรื่องความน่าจะเป็น

ความหมายของความน่าจะเป็น (โอกาส)
ตัวอย่างเหตุการณ์สำคัญที่สามารถทำนายเกิดขึ้นในอนาคต
ประเภทของเหตุการณ์
สมบัติของความน่าจะเป็น
อสมการของความน่าจะเป็น
ตัวแปรสุ่ม

แนวข้อสอบ เรื่องความน่าจะเป็น**เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องความน่าจะเป็น****สรุปเนื้อหา เรื่องสถิติ**

ความหมายของสถิติ
องค์ประกอบของข้อมูล
รูปแบบการนำเสนอข้อมูลแบบมีแผน
การแจกแจงความถี่
การวัดแนวโน้มสู่ศูนย์กลาง
การวัดตำแหน่งของข้อมูล
การวัดการกระจายข้อมูล
ตารางค่า z
การแจกแจงปกติมาตรฐาน

แนวข้อสอบ เรื่องสถิติ**เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องสถิติ****สรุปเนื้อหา เรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง**

ความหมายของลิมิต
ประเภทของลิมิต
ความต่อเนื่อง

แนวข้อสอบ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง**เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง****สรุปเนื้อหา เรื่องอนุพันธ์**

ความหมายของอนุพันธ์
สูตรการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง
อนุพันธ์แบบปริยาย
สูตรการหาอนุพันธ์อันดับมากกว่าหนึ่ง
แนวข้อสอบ เรื่องอนุพันธ์
เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องอนุพันธ์

257	สรุปเนื้อหา เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์	327
257	การประยุกต์ใช้ในการประมาณค่าของฟังก์ชันใด ๆ	327
257	การประยุกต์ใช้ในการเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันใด ๆ	327
257	การประยุกต์ใช้ในการหาสมการเส้นสัมผัสของเส้นตรงใด ๆ	328
258	การประยุกต์ใช้ในการเคลื่อนที่เชิงเส้น	328
260	การประยุกต์ใช้สร้างกราฟของฟังก์ชันใด ๆ	328
260	การประยุกต์ใช้หาจำนวนรากของฟังก์ชันใด ๆ	334
262	การประยุกต์ใช้หาค่าเหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์	334
264	แนวข้อสอบ เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์	335
270	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์	338
270	สรุปเนื้อหา เรื่องปริพันธ์	345
270	ความหมายของปริพันธ์	345
270	สูตรการหาปริพันธ์	345
273	เทคนิคการหาปริพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ	348
273	แนวข้อสอบ เรื่องปริพันธ์	353
278	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องปริพันธ์	355
280	สรุปเนื้อหา เรื่องการประยุกต์ของปริพันธ์	362
285	การประยุกต์ใช้หาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันใด ๆ	362
286	การประยุกต์ใช้หาปริมาตรใต้กราฟของฟังก์ชันใด ๆ	364
287	การประยุกต์ใช้หาความยาวส่วนโค้งของใต้กราฟของฟังก์ชันใด ๆ	365
293	ที่มีขอบเขตกำหนด	
301	แนวข้อสอบ เรื่องการประยุกต์ของปริพันธ์	366
301	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องการประยุกต์ของปริพันธ์	368
301	สรุปเนื้อหา เรื่องลำดับและอนุกรม	376
304	ความหมายของลำดับ	376
305	ประเภทของลำดับ	376
308	อนุกรม	377
315	ประเภทของอนุกรม	377
315	สมบัติของอนุกรมอนันต์	378
315	วิธีการทดสอบการมีค่าของอนุกรมอนันต์	379
316	อนุกรมกำลัง	380
316	การประยุกต์ใช้ลำดับและอนุกรมสำหรับคณิตศาสตร์การเงิน	381
318	แนวข้อสอบ เรื่องลำดับและอนุกรม	382
320	เฉลยแนวข้อสอบ เรื่องลำดับและอนุกรม	384

ความหมายของความสัมพันธ์

เซตของอันดับจะมีตัวแปรต้นที่ทำให้เกิดตัวแปรตาม

ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายเรียนแค่เฉพาะคู่อันดับเท่านั้น

โดเมน (Domain) ตามด้วย เรนจ์ (Range) เขียนในรูปของผลคูณ Cartesian

เช่น

1
2
3
4
5

×

7
8

ต้องเขียนในรูปเซตเท่านั้น

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{7, 8\} = \{(1, 7), (2, 7), (3, 7), (4, 7), (5, 7), (1, 8), (2, 8), (3, 8), (4, 8), (5, 8)\}$$

$$\text{หรือ } C = \{(x, y) \in A \times B \mid A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \wedge B = \{7, 8\}\}$$

$$\text{Dom}(C) = A$$

$$\text{Ran}(C) = B$$

ความหมายของความสัมพันธ์ผกผัน

เซตของอันดับจะมีตัวแปรตามที่ทำให้เกิดตัวแปรต้น

ถ้าต้องการเขียน C อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ผกผัน จะได้

$$C^{-1} = \{7, 8\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{(7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4), (8, 5)\}$$

$$\text{หรือ } C^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \wedge B = \{7, 8\}\}$$

$$\text{Dom}(C^{-1}) = B$$

$$\text{Ran}(C^{-1}) = A$$

$$\text{หรือ } C^{-1} = \{(y, x) \in A \times B \mid A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \wedge B = \{7, 8\}\}$$

การหาจำนวนสมาชิกของผลคูณ Cartesian

กำหนดให้ A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ใดๆ แล้ว

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

เช่น

$$\text{ถ้า } n(A) = 3 \text{ และ } n(B) = 4 \text{ แล้ว } n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 4 = 12$$

สมบัติการดำเนินการของผลคูณ Cartesian

กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นเซตใดๆ แล้ว

$$1.1) A = \emptyset \text{ หรือ } B = \emptyset \text{ ก็ต่อเมื่อ } A \times B = \emptyset$$

เช่น

$$A = \emptyset \text{ และ } B = \{1\} \text{ แล้ว } A \times B = \{(\emptyset, 1)\} = \emptyset$$

$$B = \emptyset \text{ และ } A = \{2, 3\} \text{ แล้ว } A \times B = \{(\emptyset, 2), (\emptyset, 3)\} = \emptyset$$

$$1.2) \text{ ถ้า } A \subseteq B \text{ แล้ว เช่น } A = \{1\} \subseteq \{1, 2\} = B$$

$$1.2.1) A \times C \subseteq B \times C \text{ เช่น ถ้า } C = \{4\} \text{ แล้ว } A \times C = \{(1, 4)\} \subseteq \{(1, 4), (2, 4)\} = B \times C$$

$$1.2.2) C \times A \subseteq C \times B \text{ เช่น ถ้า } C = \{4\} \text{ แล้ว } C \times A = \{(4, 1)\} \subseteq \{(4, 1), (4, 2)\} = C \times B$$

$$1.2.3) A \times A \subseteq B \times B \text{ เช่น } A \times A = \{(1, 1)\} \subseteq \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} = B \times B$$

$$1.14) A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

เช่น ถ้า $A = \{6, 8\}$, $B = \{6, 9\}$ และ $C = \{6, 7\}$ แล้ว $B - C = \{9\}$, $A \times B = \{(6, 6), (6, 9), (8, 6), (8, 9)\}$

และ $A \times C = \{(6, 6), (6, 7), (8, 6), (8, 7)\}$ จะได้ $A \times (B - C) = \{6, 8\} \times \{9\}$

$$A \times (B - C) = \{(6, 9), (8, 9)\}$$

และ $(A \times B) - (A \times C) = \{(6, 6), (6, 9), (8, 6), (8, 9)\} - \{(6, 6), (6, 7), (8, 6), (8, 7)\}$

$$(A \times B) - (A \times C) = \{(6, 9), (8, 9)\}$$

ดังนั้น $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

$$1.15) (A \times B) \cap (C \times D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

เช่น ถ้า $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3\}$ และ $D = \{1, 4\}$

จะได้ $(A \times B) \cap (C \times D) = \{(1, 1), (1, 2)\} \cap \{(1, 1), (1, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \{(1, 1)\}$$

และ $(A \times C) \cap (B \times D) = \{(1, 1), (1, 3)\} \cap \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4)\}$

$$(A \times C) \cap (B \times D) = \{(1, 1)\}$$

ดังนั้น $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

$$1.16) (A \times A)^{-1} = A \times A$$

เช่น ถ้า $A = \{1, 6\}$ แล้ว $A \times A = \{(1, 1), (1, 6), (6, 1), (6, 6)\} = (A \times A)^{-1}$

$$1.17) (A \times B)^{-1} = B \times A$$

เช่น ถ้า $A = \{2, 3\}$ และ $B = \{1, 4\}$ แล้ว $A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

จะได้ $(A \times B)^{-1} = \{(1, 2), (4, 2), (1, 3), (4, 3)\}$ และ $B \times A = \{(1, 2), (4, 2), (1, 3), (4, 3)\}$

ดังนั้น $(A \times B)^{-1} = B \times A$

หลักการหา Domain และ Range ที่เป็นจำนวนจริง

1) หากมีเศษส่วนแล้วตัวส่วนที่เป็นจำนวนจริงไม่เท่ากับศูนย์ได้ เช่น

$$1) y = \frac{2x - 9}{x + 4}$$

หา Dom (y:)

$$\text{จาก } x + 4 \neq 0$$

$$x \neq -4$$

ดังนั้น Dom(y) = $\{x \in \mathbb{R} | x \neq -4\} = \mathbb{R} - \{-4\}$

หา Ran (y:)

$$\text{จาก } y = \frac{2x - 9}{x + 4}$$

$$y(x + 4) = 2x - 9$$

$$xy + 4y = 2x - 9$$

$$xy - 2x = -4y - 9$$

$$x(y - 2) = -4y - 9$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{-4y - 9}{y - 2}$$

ดังนั้น Ran(y) = $\{y \in \mathbb{R} | y \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$

$$2) y = \frac{6x + 5}{2x - 1}$$

หา Dom (y:)

$$\text{จาก } 2x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 0.5$$

ดังนั้น Dom(y) = $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0.5\} = \mathbb{R} - \{0.5\}$

หา Ran (y:)

$$\text{จาก } y = \frac{6x + 5}{2x - 1}$$

$$y(2x - 1) = 6x + 5$$

$$2xy - y = 6x + 5$$

$$2xy - 6x = y + 5$$

$$x(2y - 6) = y + 5$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{y + 5}{2y - 6}$$

ดังนั้น Ran(y) = $\{y \in \mathbb{R} | y \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}$

2) หากมีรากที่เป็นจำนวนเต็มคู่แล้วจำนวนจริงจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เช่น

$$1) y = \sqrt[3]{x+7}$$

หา Dom (y):

$$\text{จาก } x+7 \geq 0$$

$$x \geq -7$$

$$\text{ดังนั้น Dom}(y) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -7\} = [-7, \infty)$$

หา Ran (y):

$$\text{จาก } y \geq 0$$

$$\text{ดังนั้น Ran}(y) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\} = [0, \infty)$$

$$2) x+2 = \sqrt[10]{y-9}$$

หา Dom (y):

$$\text{จาก } x+2 = \sqrt[10]{y-9}$$

$$x = \sqrt[10]{y-9} - 2 \geq 0 - 2 = -2$$

$$\text{ดังนั้น Dom}(y) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\} = [-2, \infty)$$

หา Ran (y):

$$\text{จาก } y-9 \geq 0 \text{ แล้ว } y \geq 9$$

$$\text{ดังนั้น Ran}(y) = [9, \infty)$$

3) หากมีค่าสัมบูรณ์แล้วจำนวนจริงจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เช่น

$$1) y+4 = |5-x|$$

หา Dom (y):

$$\text{ดังนั้น Dom}(y) = \mathbb{R}$$

หา Ran (y):

$$\text{จาก } y = |5-x|-4 \geq 0 - 4 = -4$$

$$\text{ดังนั้น Ran}(y) = [-4, \infty)$$

$$2) x-2 = |y+9|$$

หา Dom (y):

$$\text{จาก } x = |y+9| + 2 \geq 0 + 2 = 2$$

$$\text{ดังนั้น Dom}(y) = [2, \infty)$$

หา Ran (y):

$$\text{ดังนั้น Ran}(y) = \mathbb{R}$$

4) หากมีเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนเต็มคู่สัมบูรณ์แล้วจำนวนจริงจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เช่น

$$1) y = x^2 - 2x + 3$$

หา Dom (y):

$$\text{ดังนั้น Dom}(y) = \mathbb{R}$$

หา Ran (y):

$$\text{จาก } y = |5-x|-4 \geq 0 - 4 = -4$$

$$\text{ดังนั้น Ran}(y) = [-4, \infty)$$

$$2) x = y^6 + 1$$

หา Dom (y):

$$\text{จาก } x = y^6 + 1$$

$$\text{จะได้ } x-1 = y^6$$

$$y = \sqrt[6]{x-1}$$

$$\text{แล้ว } x-1 \geq 0 \text{ ทำให้ } x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$\text{ดังนั้น Dom}(y) = [1, \infty)$$

หา Ran (y):

$$\text{ดังนั้น Ran}(y) = \mathbb{R}$$

สมบัติการดำเนินการของความสัมพันธ์

กำหนดให้ a และ b เป็นความสัมพันธ์ใดๆ แล้ว

$$\text{เช่น } a = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \text{ และ } b = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

$$1.1) \text{Dom}(a \cap b) \subseteq \text{Dom}(a)$$

$$\text{เช่น } \text{Dom}(a \cap b) = \text{Dom}(\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \cap \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\})$$

$$\text{Dom}(a \cap b) = \text{Dom}(\{(1, 2)\}) = \{1\} \subseteq \{1, 2, 3\} = \text{Dom}(a)$$

$$1.2) \text{Ran}(a \cap b) \subseteq \text{Ran}(a)$$

$$\text{เช่น } \text{Ran}(a \cap b) = \text{Ran}(\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \cap \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\})$$

$$\text{Ran}(a \cap b) = \text{Ran}(\{(1, 2)\}) = \{2\} \subseteq \{2, 3, 4\} = \text{Ran}(a)$$

$$1.3) \text{Dom}(a) \subseteq \text{Dom}(a \cup b)$$

$$\text{เช่น } \text{Dom}(a) = \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\} = \text{Dom}(a \cup b)$$

$$\text{Dom}(a \cup b) = \text{Dom}(\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\})$$

ความหมายของฟังก์ชัน

กำหนดให้ x_1 และ x_2 เป็น Domain และ y_1 และ y_2 เป็น Range ที่ทำให้ $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$

เช่น กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$y = 2x + 9$ เป็นฟังก์ชัน เพราะเป็นสมการเส้นตรง เมื่อลากขนานกับแกน Y ตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

$y^2 = 9 - x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเป็นสมการวงกลม เมื่อลากขนานกับแกน Y ตัดสองจุด

หลักการสังเกต

วิธีการตรวจสอบ ลักษณะคำตอบของ Range	มีสมาชิกเพียงตัวเดียว	มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว
ให้วาดกราฟของสมการนั้น แล้วลากขนานกับแกน Y	เป็นฟังก์ชัน ✓	ไม่เป็นฟังก์ชัน ✗
แทนสมาชิกใน Domain ตัวใดตัวหนึ่ง		

ประเภทของฟังก์ชัน

1) Injective Function (ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง)

กำหนดให้ x_1 และ x_2 เป็น Domain และ y_1 และ y_2 เป็น Range ที่ทำให้ $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ แล้ว $x_1 = x_2$

เช่น กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$y = 6x + 4$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะเป็นสมการเส้นตรง เมื่อลากขนานกับแกน X ตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

$y = 4x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะเป็นสมการพาราโบลา เมื่อลากขนานกับแกน X ตัดสองจุด

หลักการสังเกต

วิธีการตรวจสอบ ลักษณะคำตอบของ Range	มีสมาชิกเพียงตัวเดียว	มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว
ให้วาดกราฟของสมการนั้น แล้วลากขนานกับแกน Y	เป็นฟังก์ชัน ✓	ไม่เป็นฟังก์ชัน ✗
แทนสมาชิกใน Domain ตัวใดตัวหนึ่ง		

2) Surjective Function (ฟังก์ชันทั่วถึง)

กำหนดให้ $f: A \rightarrow B$ แล้วสำหรับ $y \in B$ ใดๆ จะมี $x \in A$ ที่ทำให้ $f(x) = y$

เช่น กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$y = 9x + 4$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เพราะ $\text{Dom}(y) = \text{Ran}(y) = \mathbb{R}$

$y = x^2 + 9$ ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เพราะ $\text{Dom}(y) = \mathbb{R}$ แต่ $\text{Ran}(y) = [9, \infty) \neq \mathbb{R}$

3) Bijective Function (ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง)

Injective + Surjective

เช่น กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$10y = 3x - 9$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง เพราะหากลากขนานกับแกน X ตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น และ $\text{Dom}(y) = \text{Ran}(y) = \mathbb{R}$

$5y = 2x^2 + 4$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

เพราะหากลากขนานกับแกน y ตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น และ $\text{Dom}(y) = \mathbb{R}$ แต่ $\text{Ran}(y) = \left[\frac{4}{5}, \infty\right) \neq \mathbb{R}$

4) Inverse Function (ฟังก์ชันผกผัน)

กำหนดให้ y_1 และ y_2 เป็น Domain และ x_1 และ x_2 เป็น Range ที่ทำให้ $y_1 = y_2$ แล้ว $x_1 = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x_2$

ต้องเป็น Injective Function (ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง) จึงสามารถหาฟังก์ชันผกผันได้

เช่น กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$f(x) = \frac{5x+8}{9} \text{ มีฟังก์ชันผกผัน เพราะเป็นสมการเชิงเส้นซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว}$$

$$\text{ตัวผกผันของฟังก์ชันนี้ คือ } 9x = 5f^{-1}(x) + 8$$

$$f^{-1}(x) = \frac{9x-8}{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ ไม่มีฟังก์ชันผกผัน เพราะมี } f(x) = \frac{1}{9} \text{ จะได้ } x \in \{-3, 3\}$$

ทำให้ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5) Increase Function (ฟังก์ชันเพิ่ม)

กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ จะมี x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้ $x_1 \leq x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$

เช่น $f(x) = 2x + 5$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะ $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 = f(x_2)$

6) Decrease Function (ฟังก์ชันลด)

กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ จะมี x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้ $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

เช่น $f(x) = \frac{1}{x+4}$ เป็นฟังก์ชันลดบน $(1, \infty)$ เพราะ $x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 4 < x_2 + 4$

$$\rightarrow f(x_1) = \frac{1}{x+4} > \frac{1}{x^2+4} = f(x_2)$$

7) Step Function (ฟังก์ชันขั้นบันได)

กำหนดให้ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_{n-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\text{เป็นจำนวนจริง แล้ว } g(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; x \leq a_1 \\ f_2(x) & ; a_1 < x < a_2 \\ \dots & \\ f_{n-1}(x) & ; x \geq a_n \end{cases}$$

เช่น $f(x) = \begin{cases} 2-x & ; x \leq 1 \\ 2x+3 & ; 1 < x < 2 \\ 4+8x^2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันได เพราะ $a_1 = 1 \in \mathbb{R}$ และ $a_2 = 2 \in \mathbb{R}$

8) Composite Function (ฟังก์ชันประกอบ)

กำหนดให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ จะมี $x \in A$ และ $y \in B$ ที่ทำให้ $z \in C$ แล้ว $z \in g \circ f = g(f(x))$

เช่น $f(x) = 3x - 2$ และ $g(x) = x^2$ แล้ว $g \circ f = g(f(x)) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2$

$$\text{หรือ } f \circ g = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 2$$

สมบัติของฟังก์ชัน

กำหนดให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จะได้

1) ความสัมพันธ์ f ไม่เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ $\forall (x, y), (x, z) \in f \rightarrow y \neq z$

เช่น $f = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมี $x = 1 \in \text{Dom}(f)$ แต่ $y = 2 \neq 3 = z \in \text{Ran}(f)$

2) ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ $\forall (x, y), (x, z) \in f \rightarrow y = z$

เช่น $f = \{(1, 2), (1, 2)\}$ เป็นฟังก์ชัน เพราะมี $x = 1 \in \text{Dom}(f)$ แต่ $y = 2 = z \in \text{Ran}(f)$

2.1) $\text{Dom}(f) = \{x | (x, y) \in f\}$ เช่น $\text{Dom}(f) = \{1\}$

2.2) $\text{Ran}(f) = \{y | (x, y) \in f\}$ เช่น $\text{Ran}(f) = \{2\}$

การดำเนินการฟังก์ชัน

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันใด ๆ จะได้

1) $f + g = \{(x, y) | y = f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$

เช่น 1) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \wedge g = \{(1, 3), (3, 7), (4, 6)\}$ แล้ว $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$

จะได้ $f + g = \{(1, 2 + 3), (3, 3 + 7)\} = \{(1, 5), (3, 10)\}$

2) $f(x) = 2x + 1 \wedge g(x) = x^2$ แล้ว $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ จะได้ $f(x) + g(x) = 2x + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1$

2) $f + g = g + f$

เช่น 1) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \wedge g = \{(1, 3), (3, 7), (4, 6)\}$

จะได้ $f + g = \{(1, 2 + 3), (3, 3 + 7)\} = \{(1, 3 + 2), (3, 7 + 3)\} = g + f$

2) $f(x) = 2x + 1 \wedge g(x) = x^2$ จะได้ $f(x) + g(x) = 2x^2 + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1 = g(x) + f(x)$

3) $f - g = \{(x, y) | y = f(x) - g(x), x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$

เช่น 1) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \wedge g = \{(1, 3), (3, 7), (4, 6)\}$ แล้ว $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$

จะได้ $f - g = \{(1, 2 - 3), (3, 3 - 7)\} = \{(1, -1), (3, -4)\}$

2) $f(x) = 2x + 1 \wedge g(x) = x^2$ แล้ว $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ จะได้ $f(x) - g(x) = 2x + 1 - x^2$

4) $f \cdot g = \{(x, y) | y = f(x) \cdot g(x), x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$

เช่น 1) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \wedge g = \{(1, 3), (3, 7), (4, 6)\}$ แล้ว $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$

จะได้ $f \cdot g = \{(1, 2 \cdot 3), (3, 3 \cdot 7)\} = \{(1, 6), (3, 21)\}$

2) $f(x) = 2x + 1 \wedge g(x) = x^2$ แล้ว $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ จะได้ $f(x) \cdot g(x) = (2x + 1)x^2 = 2x^3 + x^2$

5) $f \cdot g = g \cdot f$

เช่น 1) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \wedge g = \{(1, 3), (3, 7), (4, 6)\}$ จะได้ $f \cdot g = \{(1, 2 \cdot 3), (3, 3 \cdot 7)\} = \{(1, 3 \cdot 2), (3, 7 \cdot 3)\} = g \cdot f$

2) $f(x) = 2x + 1 \wedge g(x) = x^2$ จะได้ $f(x) \cdot g(x) = (2x + 1)x^2 = g(x) \cdot f(x)$

6) $\frac{f}{g} = \left\{ x, y | y = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g \setminus \{0\}) \right\}$

เช่น 1) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \wedge g = \{(1, 3), (3, 7), (4, 6)\}$ แล้ว $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g \setminus \{0\}) = \{1, 2, 3\} \cap \{(1, 3, 4) = (1, 3)$

จะได้ $\frac{f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{2}{3}\right), \left(3, \frac{3}{7}\right) \right\}$

2) $f(x) = 2x + 1 \wedge g(x) = x^2$ แล้ว $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ จะได้ $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 1}{x^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

การแก้สมการเชิงฟังก์ชัน

1) การแทนค่า

2) การเปลี่ยนตัวแปร

3) การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

4) รูปแบบพิเศษ

สมการฟังก์ชันโคชี

กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะมี c เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ ที่ทำให้

4.1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

$f(x) = cx$

4.2) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(x) = e^{cx}$

4.3) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y); x, y \in \mathbb{R}^+$

$f(x) = \text{clog } x$

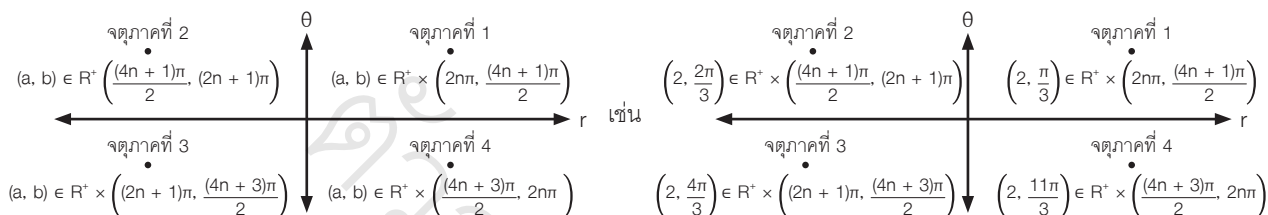
4.4) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y); x, y \in \mathbb{R}^+$

$f(x) = x^c$

ระบบพิกัดฉาก กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้เกิดคู่อันดับ (a, b) บนพิกัดฉาก ดังรูปต่อไปนี้



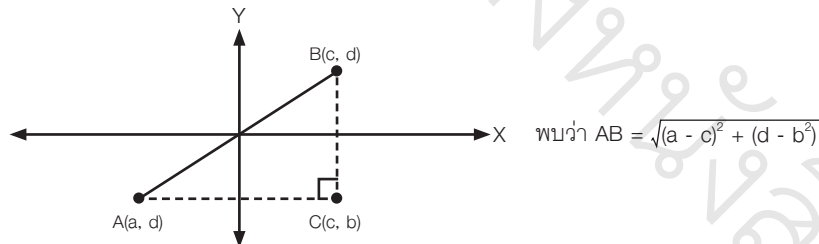
ระบบพิกัดเชิงขั้ว กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะมี n เป็นจำนวนเต็ม ที่ทำให้เกิดคู่อันดับ (a, b) บนพิกัดเชิงขั้ว ดังรูปต่อไปนี้



จุด

ระยะห่างจากจุดสองจุดบนพิกัดฉาก

กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้เกิดจุดบนพิกัดฉากทั้ง 2 จุด คือ $A(a, b)$ และ $B(c, d)$ ดังรูปต่อไปนี้



เช่น ระยะห่างจากจุดบนพิกัด $A(2, 5)$ ไปยังจุดบนพิกัด $B(-2, 2)$ เป็น $AB = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (5 - 2)^2}$ หน่วย

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ หน่วย}$$

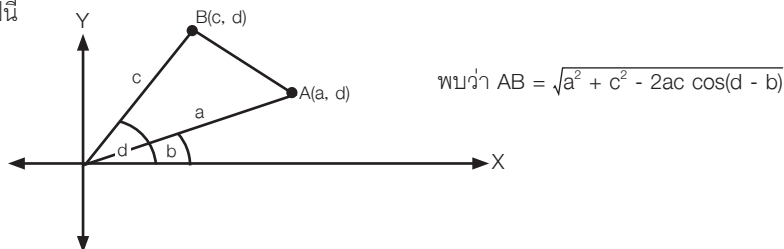
$$AB = \sqrt{16 + 9} \text{ หน่วย}$$

$$AB = \sqrt{25} \text{ หน่วย}$$

$$AB = 5 \text{ หน่วย}$$

ระยะห่างจากจุดสองจุดบนพิกัดเชิงขั้ว

กำหนดให้ a และ c เป็นจำนวนจริงบวก และ b และ d เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้เกิดจุดบนพิกัดเชิงขั้วทั้ง 2 จุด คือ $A(a, b)$ และ $B(c, d)$ ดังรูปต่อไปนี้



เช่น ระยะทางจากจุดบนพิกัด $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ไปยังจุดบนพิกัด $B\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ เป็น $AB = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2(2)(4) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}$ หน่วย

$$AB = \sqrt{20 - 16 \cos \frac{\pi}{6}} \quad \text{หน่วย}$$

$$AB = \sqrt{20 - 16 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$AB = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} \quad \text{หน่วย}$$

$$AB = \sqrt{4(5 - 2\sqrt{3})} \quad \text{หน่วย}$$

$$AB = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} \quad \text{หน่วย}$$

จุดบนส่วนของเส้นตรง

จุดตัดแกน กำหนดให้ (a, b) เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรงที่เป็นจำนวนจริง แล้ว

จุดตัดแกน X จะได้ $A(a, 0)$ อยู่ทางด้านขวาของแกน X ก็ต่อเมื่อ $a > 0$

$A(0, a)$ อยู่ทางด้านซ้ายของแกน X ก็ต่อเมื่อ $a < 0$

เช่น 1) $A(7, 0)$ อยู่ทางด้านขวาของแกน X ในระยะทางเป็น 7 หน่วย

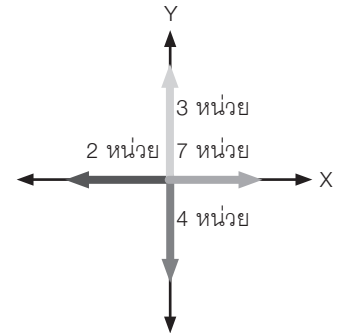
2) $A(-2, 0)$ อยู่ทางด้านซ้ายของแกน X ในระยะทางเป็น 2 หน่วย

จุดตัดแกน Y จะได้ $A(0, b)$ อยู่เหนือของแกน Y ก็ต่อเมื่อ $b > 0$

$A(0, b)$ อยู่ใต้ของแกน Y ก็ต่อเมื่อ $b < 0$

เช่น 1) $A(0, 3)$ อยู่เหนือแกน Y ในระยะทางเป็น 3 หน่วย

2) $A(0, -4)$ อยู่ใต้แกน Y ในระยะทางเป็น 4 หน่วย



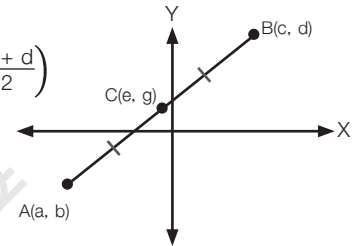
จุดแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง

กำหนดให้ a, b, c, d, e และ g เป็นจำนวนจริง จะมีจุด $C(e, g)$

ทำหน้าที่แบ่งครึ่งความยาวจากจุด $A(a, b)$ และ $B(c, d)$ จะได้ว่า $(e, g) = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

เช่น จุดกึ่งกลางระหว่างจุดปลายของ $A(5, 6)$ และ $B(-3, -2)$ คือ

$$C\left(\frac{5-3}{2}, \frac{6-2}{2}\right) = C(1, 2)$$



จุดแบ่งภายในส่วนของเส้นตรง

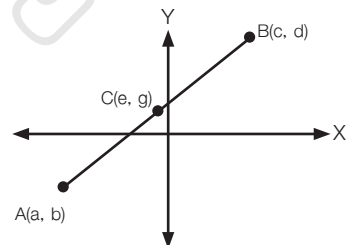
กำหนดให้ a, b, c, d, e และ g เป็นจำนวนจริง จะมีจุดภายใน $C(e, g)$

ทำหน้าที่แบ่งความยาวจากจุด $A(a, b)$ และ $B(c, d)$ มีสัดส่วนของ

$$\text{ความยาว } \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n} \text{ จะได้ } (e, g) = \left(\frac{mc + na}{m + n}, \frac{md + nb}{m + n}\right)$$

เช่น จุดแบ่งภายในระหว่างจุดปลายของ $A(5, 6)$ และ $B(-3, -2)$

$$\text{ที่ทำให้ } \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3} \text{ คือ } C\left(\frac{2(-3) + 3(5)}{2+3}, \frac{2(-2) + 3(6)}{2+3}\right) = C\left(\frac{9}{5}, \frac{14}{5}\right)$$



จุดแบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง

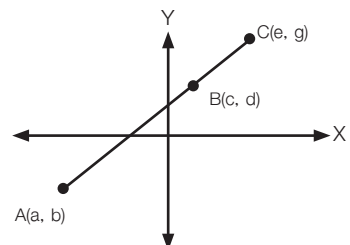
กำหนดให้ a, b, c, d, e และ g เป็นจำนวนจริง จะมีจุดภายนอก $C(e, g)$

ทำหน้าที่แบ่งความยาวจากจุด $A(a, b)$ และ $B(c, d)$ มีสัดส่วนของ

$$\text{ความยาว } \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n} \text{ จะได้ } (e, g) = \left(\frac{mc - na}{m - n}, \frac{md - nb}{m - n}\right)$$

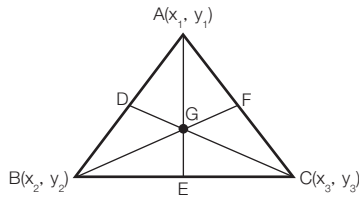
เช่น จุดแบ่งภายนอกระหว่างจุดปลายของ $A(5, 6)$ และ $B(-3, -2)$

$$\text{ที่ทำให้ } \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3} \text{ คือ } C\left(\frac{2(-3) - 3(5)}{2-3}, \frac{2(-2) - 3(6)}{2-3}\right) = C(21, 22)$$



ความเกี่ยวข้องระหว่างจุดกับรูปสามเหลี่ยม

จุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการแบ่งครึ่งในแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

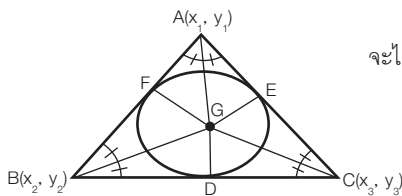


- จะได้ 1) $BD = AD$, $AF = FC$ และ $BE = CE$
 2) $D\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, $E\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ และ $F\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$
 3) $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$
 4) $GE : AG = DG : GC = GF : BG = 1 : 2$

เช่น รูปสามเหลี่ยม ABC จะมีพิกัดบน $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ และ $C(2, 2)$ จะได้

- 1) $BD = AD = 0.5AB = 0.5(2) = 1$, $AF = FC = 0.5AC = 0.5\sqrt{2}$ และ $BE = CE = 0.5BC = 0.5(2) = 1$
 2) $D\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = D(1, 0)$, $E\left(\frac{2+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = E(2, 1)$ และ $F\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = F(1, 1)$
 3) $G\left(\frac{0+2+2}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = G\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$
 4) $GE : AG = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} : \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2\sqrt{5}}{3} = 1 : 2$
 $DG : GC = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} : \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = 1 : 2$
 $GF : BG = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} : \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = 1 : 2$

จุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการแบ่งครึ่งในแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

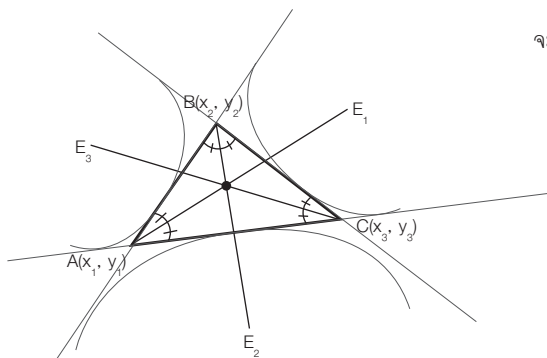


- จะได้ 1) $\angle ABG = \angle GBC$, $\angle ACG = \angle GCB$ และ $\angle BAG = \angle GAC$
 2) ถ้า $AB = a$, $BC = b$ และ $AC = c$ แล้ว $G\left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$

เช่น รูปสามเหลี่ยม ABC จะมีพิกัดบน $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ และ $C(2, 2)$ จะได้

- 1) $\angle ABG = \angle GBC = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, $\angle ACG = \angle GCB = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$ และ $\angle BAG = \angle GAB = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$
 2) $AB = BC = 2$ และ $AC = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$ และ $G\left(\frac{2(0) + 2(2) + 2(2\sqrt{2})}{2 + 2 + 2\sqrt{2}}, \frac{2(0) + 2(0) + 2(2\sqrt{2})}{2 + 2 + 2\sqrt{2}}\right) = G(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$

จุดศูนย์กลางภายนอกวงกลมที่เกิดจากการแบ่งครึ่งมุมในแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยม

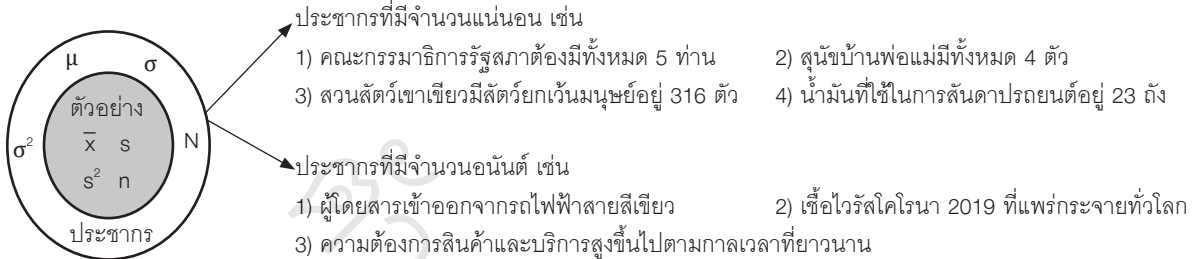


- จะได้ 1) $\angle BAE_1 = \angle E_1AC$, $\angle ABE_2 = \angle E_2BC$ และ $\angle BCE_3 = \angle E_3CA$
 2) ถ้า $AB = a$, $BC = b$ และ $AC = c$ แล้ว
 2.1) $E_1\left(\frac{-ax_1 + bx_2 + cx_3}{-a + b + c}, \frac{-ay_1 + by_2 + cy_3}{-a + b + c}\right)$
 2.2) $E_2\left(\frac{ax_1 - bx_2 + cx_3}{a - b + c}, \frac{ay_1 - by_2 + cy_3}{a - b + c}\right)$
 2.3) $E_3\left(\frac{ax_1 + bx_2 - cx_3}{a + b - c}, \frac{ay_1 + by_2 - cy_3}{a + b - c}\right)$

ความหมายของสถิติ หมายถึง ข้อมูลของสังคมทั้งหมด 2 ประเภท คือ

- 1) สถิติเชิงคุณภาพ หมายถึง ข้อมูลบ่งบอกถึงลักษณะเฉพาะตัวตนของข้อมูลที่ไม่มีปริมาณไปเกี่ยวข้อง
เช่น 1) เบอร์โทรศัพท์ 2) รหัสไปรษณีย์ 3) เลขบัตรประชาชน 4) เพศ 5) สถานะการแต่งงาน
- 2) สถิติเชิงปริมาณ หมายถึง ข้อมูลบ่งบอกปริมาณที่สามารถเป็นตัวชี้วัดสำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพ
เช่น 1) ราคาสินค้า 2) ค่าพลังงานเชื้อเพลิง 3) ระยะเวลา 4) ปริมาตรในภาชนะ 5) พื้นที่ในห้อง

องค์ประกอบของข้อมูล หมายถึง ตัวอย่างและประชากรเป็นตัวแปรต้นเป็นจำนวนนับเท่านั้น

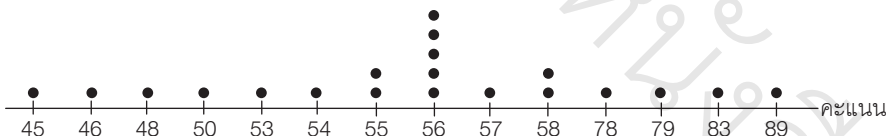


รูปแบบการนำเสนอข้อมูลแบบมีแผน หมายถึง ตัวอย่างและประชากรเป็นตัวแปรต้นเป็นจำนวนนับเท่านั้น

- 1) แผนภาพ เหมาะสมกับการนำเสนอข้อมูลระเบียบแบบภาพที่มีปริมาณความถี่ไม่เกิน 100 ข้อมูล

เช่น คะแนนสอบของนักเรียน 20 คน จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน ในรายวิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ได้แก่ 45, 46, 48, 50, 53, 54, 55, 55, 56, 56, 56, 56, 57, 58, 58, 78, 79, 83 และ 89 คะแนน

- 1) จุด เขียนแผนภาพตามนี้



- 2) ต้นไม้ เขียนแผนภาพตามนี้

ใบ (พิจารณาเฉพาะเลขโดดหลักหน่วยเท่านั้น)	ต้น (พิจารณาเฉพาะเลขโดดตั้งแต่หลักแรกหน้า ไปจนถึงหลักสุดท้ายที่ไม่ใช่หลักหน่วย)
5 6 8	4
0 3 4 5 5 6 6 6 6 6 7 8 8	5
8 9	7
3 9	8

- 3) รอยขีด เขียนแผนภาพตามนี้

ข้อมูล	รอยขีด (พิจารณาเฉพาะความถี่เท่านั้น)	ข้อมูล	รอยขีด (พิจารณาเฉพาะความถี่เท่านั้น)
45	I	56	
46	I	57	I
48	I	58	
50	I	78	I
53	I	79	I
54	I	83	I
55		89	I

2) แผนภูมิ เหมาะสมกับการนำเสนอข้อมูลระเบียบที่มีปริมาณความถี่ใดๆ

เช่น การตรวจสอบปริมาณออกซิเจนในน้ำคลองลัดโพธิ์ (BOD) พบว่ามีปริมาณแบคทีเรียในน้ำ แสดงดังตารางต่อไปนี้

ค่า BOD (mg/L)	ความถี่ (ล้านตัว)	ร้อยละ
1 - 5	5	$\frac{5}{70} \times 100 = 7.14$
6 - 10	20	$\frac{20}{70} \times 100 = 28.57$
11 - 15	35	$\frac{35}{70} \times 100 = 50$
16 - 20	10	$\frac{10}{70} \times 100 = 14.29$
รวมทั้งหมด	$5 + 20 + 35 + 10 = 70$	100

แล้วนำมาคำนวณตามสถิติพบว่า

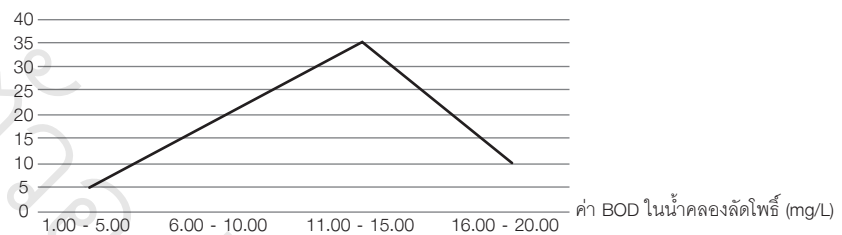
ค่าน้อยที่สุดเป็น 5,

$Q_1 = 8.625$, $Q_2 = 11.929$, $Q_3 = 14.429$ และ

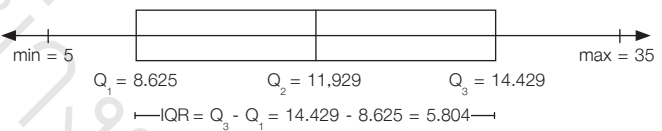
ค่ามากที่สุดเป็น 35

1) เส้นตรง เขียนแผนภาพตามนี้

ปริมาณแบคทีเรีย (ล้านตัว)



2) แผนภูมิแท่งเขียน เขียนแผนภาพตามนี้

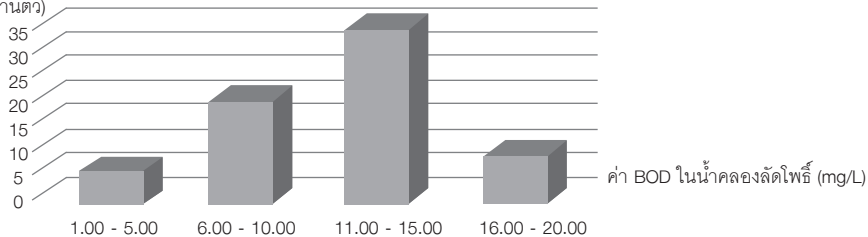


3) รูปภาพ เขียนแผนภาพตามนี้

ค่า BOD (mg/L)	ความถี่ (ล้านตัว)
1 - 5	●●●●●
6 - 10	●●●●●●●●●●
11 - 15	●●●●●●●●●●●●●●●●
16 - 20	●●●●●●●●

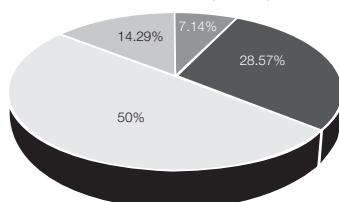
4) แท่ง เขียนแผนภาพตามนี้

ปริมาณแบคทีเรีย (ล้านตัว)



5) วงกลม เขียนแผนภาพตามนี้

ปริมาณแบคทีเรีย (ล้านตัว)



- 1.00 - 5.00
- 6.00 - 10.00
- 11.00 - 15.00
- 16.00 - 20.00

ค่า BOD ในน้ำคลองลัดโพธิ์ (mg/L)

การแจกแจงความถี่ กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ และ x_n เป็นข้อมูลจำนวน n ตัว จะได้ว่า

1) พิสัย คือ $R = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

เช่น พิสัยของข้อมูล 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 คือ $R = \max\{1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \min\{1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = 7 - 1 = 6$

2) จำนวนอันตรภาคชั้นสูงสุด คือ $k = [1 + 3.3 \log n]$

เช่น ข้อมูล 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 มีทั้งหมด 8 ตัว มีจำนวนอันตรภาคชั้นสูงสุด $k = [1 + 3.3 \log 8]$ ชั้น
 $= [3.98]$ ชั้น
 $= 3$ ชั้น

3) ความกว้างของอันตรภาคชั้น คือ $l = \frac{R}{k}$ เช่น ข้อมูล 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 มีจำนวนอันตรภาคชั้นสูงสุด $k = 3$ ชั้น

ในพิสัยเป็น $R = 6$ ทำให้ ความกว้างของอันตรภาคชั้น $l = \frac{6}{3} = 2$

4) ขอบเขตจำกัดแต่ละอันตรภาคชั้น คือ $x_{\min} + (m - 1)l \leq X_m < x_{\min} + ml$ สำหรับแต่ละ $m \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$
 และ $x_{\min} + (k - 1)l \leq X_k < x_{\min} + kl$

เช่น ข้อมูล 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 มีขีดจำกัดแต่ละอันตรภาคชั้นต่อไปนี้

อันตรภาคชั้นที่ 1 มีขีดจำกัดเป็น $1 + (1 - 1)2 = 1 \leq X_1 < 1 + 1(2) = 3$

อันตรภาคชั้นที่ 2 มีขีดจำกัดเป็น $1 + (2 - 1)2 = 3 \leq X_2 < 1 + 2(2) = 5$

อันตรภาคชั้นที่ 3 มีขีดจำกัดเป็น $1 + (3 - 1)2 = 5 \leq X_3 < 1 + 3(2) = 7$

5) ความถี่ คือ จำนวนข้อมูลในแต่ละข้อมูล

6) ความถี่สะสม คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมดในแต่ละอันตรภาคชั้น

7) ความถี่สัมพัทธ์สะสม คือ อัตราส่วนของจำนวนข้อมูลในแต่ละข้อมูลต่อจำนวนข้อมูลทั้งหมดอันตรภาคชั้น

8) ความถี่สะสมสัมพัทธ์ คือ อัตราส่วนของความถี่สะสมในแต่ละอันตรภาคชั้นต่อความถี่สะสมทั้งหมด

9) ร้อยละความถี่สัมพัทธ์ คือ 100 เท่าของความถี่สัมพัทธ์

เช่น ข้อมูล 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 จะสามารถสร้างตารางแจกแจงความถี่ได้ว่า

ขอบเขตข้อมูล ในแต่ละอันตรภาคชั้น	ความถี่	ความถี่สะสม	ความถี่สัมพัทธ์	ความถี่สะสมสัมพัทธ์	ร้อยละความถี่สะสมสัมพัทธ์
1 - 3	4	4	$\frac{4}{8} = 0.50$	$\frac{4}{8} = 0.50$	$0.50 \times 100 = 50$
3 - 5	2	6	$\frac{2}{8} = 0.25$	$\frac{6}{8} = 0.75$	$0.25 \times 100 = 25$
5 - 7	2	8	$\frac{2}{8} = 0.25$	$\frac{8}{8} = 1.00$	$0.25 \times 100 = 25$
รวมทั้งหมด	8	8	1.00	1.00	100

การวัดแนวโน้มสู่ศูนย์กลาง

1) ค่าเฉลี่ย

1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

1) แบบไม่ถ่วงน้ำหนัก เหมาะกับข้อมูลที่สามารถนับได้ เช่น อายุ, งบประมาณ เป็นต้น

กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ และ x_n เป็นข้อมูลจำนวน n ตัว แล้ว $\bar{X} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$

เช่น ค่าเฉลี่ยของอายุนักเรียนจำนวน 8 คน มีการเก็บข้อมูลได้ว่า 11, 12, 12, 13, 14, 15, 15 และ 16 ปี

เป็น $\bar{X} = \mu = \frac{11 + 12 + 12 + 13 + 14 + 15 + 15 + 16}{8} = 13.5$ ปี

2) แบบถ่วงน้ำหนักที่ไม่มีการแจกแจงอันตรภาคชั้น

เหมาะกับข้อมูลที่สามารถนับได้ เช่น ผลการเรียน เป็นต้น

กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ และ x_n เป็นข้อมูลที่มีความถี่เป็น $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-1}$ และ f_n ตามลำดับ แล้ว $\bar{X} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n f_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i \right)$

เช่น นักเรียนมีผลการเรียนแต่ละหน่วยกิตที่ได้ลงทะเบียนเรียนในภาคเรียนปี พ.ศ. 2567 เป็น 4, 4, 3.5

และ 3.5 มีจำนวนหน่วยกิตเป็น 3, 3, 2 และ 2 ตามลำดับเฉลี่ยอยู่ $\frac{(4 \times 3) + (4 \times 3) + (3.5 \times 2) + (3.5 \times 2)}{3 + 3 + 2 + 2} = 3.8$

3) แบบถ่วงน้ำหนักที่มีการแจกแจงอันตรภาคชั้น

เหมาะกับข้อมูลในลักษณะตารางในแต่ละอันตรภาคชั้น

กำหนดให้ข้อมูลที่มีการนำเสนอแบบตารางได้ว่า

ขอบเขตข้อมูลในแต่ละอันตรภาคชั้น	ความถี่ (f_i)	จุดกึ่งกลางข้อมูลในแต่ละอันตรภาคชั้น (x_i)	($f_i x_i$)	$d_i = x_i - A$
$x_{\min} \leq X_1 < x_{\min} + l$	f_1	$x_{\min} + \frac{l}{2}$	$\left(x_{\min} + \frac{l}{2}\right)f_1$	$x_{\min} + l - A$
$x_{\min} + l \leq X_2 < x_{\min} + 2l$	f_2	$x_{\min} + \frac{3l}{2}$	$\left(x_{\min} + \frac{3l}{2}\right)f_2$	$x_{\min} + \frac{3l}{2} - A$
...	...	...	...	...
$x_{\min} \leq X_k < x_{\min} + kl$	f_k	$x_{\min} + \frac{(2k-1)l}{2}$	$\left(x_{\min} + \frac{(2k-1)l}{2}\right)f_k$	$x_{\min} + \frac{(2k-1)l}{2} - A$
...	...	...	...	...
$x_{\min} \leq X_n < x_{\min} + nl$	f_n	$x_{\min} + \frac{(2n-1)l}{2}$	$\left(x_{\min} + \frac{(2n-1)l}{2}\right)f_n$	$x_{\min} + \frac{(2n-1)l}{2} - A$
...	...	...	...	...
$x_{\min} + (m-1)l \leq X_m < x_{\min} + ml$	f_m	$x_{\min} + \frac{(2m-1)l}{2}$	$\left(x_{\min} + \frac{(2m-1)l}{2}\right)f_m$	$x_{\min} + \frac{(2m-1)l}{2} - A$
รวมทั้งหมด	$\sum_{i=1}^m f_i$	รวมทั้งหมด	$\sum_{i=1}^m \left(x_{\min} + \frac{(2i-1)l}{2}\right)f_i$	

ตัวอย่าง

จะมีวิธีการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้ถึง 2 วิธี คือ

สำหรับตัวอย่าง

$$1) \bar{X} = \frac{\sum_{i=k}^n \left(x_{\min} + \frac{(2i-1)l}{2}\right)f_i}{\sum_{i=k}^n f_i} = \frac{\sum_{i=k}^n x_i f_i}{\sum_{i=k}^n f_i}$$

$$2) \bar{X} = A + \frac{\sum_{i=k}^n f_i \left(x_{\min} + \frac{(2i-1)l}{2} - A\right)}{\sum_{i=k}^n f_i} = A + \frac{\sum_{i=k}^n f_i d_i}{\sum_{i=k}^n f_i}$$

สำหรับประชากร

$$1) \mu = \frac{\sum_{i=1}^m \left(x_{\min} + \frac{(2i-1)l}{2}\right)f_i}{\sum_{i=1}^m f_i} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i f_i}{\sum_{i=1}^m f_i}$$

$$2) \mu = A + \frac{\sum_{i=1}^m f_i \left(x_{\min} + \frac{(2i-1)l}{2} - A\right)}{\sum_{i=1}^m f_i} = A + \frac{\sum_{i=1}^m f_i d_i}{\sum_{i=1}^m f_i}$$

เช่น ค่าเฉลี่ยของน้ำหนักสุกรในแต่ละช่วงแล้วหาค่าเฉลี่ยของน้ำหนักของสุกรตั้งแต่ 0.50 กิโลกรัม ถึง 4.50 กิโลกรัม ตามตารางดังนี้

ขอบเขตน้ำหนักของสุกร (kg)	ความถี่ (f)	จุดกึ่งกลางของน้ำหนักสุกร (x)	($f x$)	$d_i = x_i - A$
0.50 - 2.50	20	$0.50 + \frac{2}{2} = 1.50$	$(1.50)20 = 30$	$0.50 + 2 - 3 = -0.50$
2.50 - 4.50	15	$0.50 + \frac{3(2)}{2} = 3.50$	$(3.50)15 = 52.5$	$2.50 + \frac{3(2)}{2} - 3 = 2.50$
4.50 - 6.50	25	$0.50 + \frac{5(2)}{2} = 5.50$	$(5.50)25 = 137.5$	$4.50 + \frac{5(2)}{2} - 3 = 6.50$
รวมทั้งหมด	60	รวมทั้งหมด	220	

สมมติให้ A เป็นค่าเฉลี่ยที่เป็นจำนวนนับใกล้เคียงของ 1) คือ 3

- 1) กำหนดให้ข้อมูล 6 จำนวน ที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าความแปรปรวนเป็น 6.5 และ 10.25 ตามลำดับ แต่พนักงานจำข้อมูลได้ 4 จำนวน ได้แก่ 2, 4, 5 และ 7 แล้ว ข้อมูลทั้งสองข้อมูลที่เหลือมีค่าพิสัยเท่าใด
ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4 จ. 5
- 2) กำหนดให้ข้อมูล 6 จำนวน ได้แก่ 7, 10, 11, 15, a และ b ที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าความแปรปรวนเป็น 10 และ $6\frac{2}{3}$ ตามลำดับ แล้ว จงหาค่าของ $|a - b|$
ก. 1 ข. 3 ค. 5 ง. 7 จ. 9
- 3) กำหนดให้ข้อมูล 2 ชุด ประกอบไปด้วยข้อมูลชุดที่ 1 มี 100 จำนวน ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็น 15 และ 3 ตามลำดับ ที่ทำให้ข้อมูลทั้ง 2 ชุดรวมกันเป็น 250 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 15.6 และ $\sqrt{13.44}$ ตามลำดับ แล้ว จงหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานข้อมูลชุดที่ 2
ก. 2 ข. 4 ค. 6 ง. 8 จ. 10
- 4) กำหนดให้ข้อมูล 8 จำนวน ได้แก่ 6, 10, 7, 13, a, 12, b และ 12 ที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าความแปรปรวนเป็น 9 และ $9\frac{1}{4}$ ตามลำดับ แล้ว จงหาค่าของ $(a - b)^2$
ก. 32 ข. 28 ค. 24 ง. 16 จ. 8

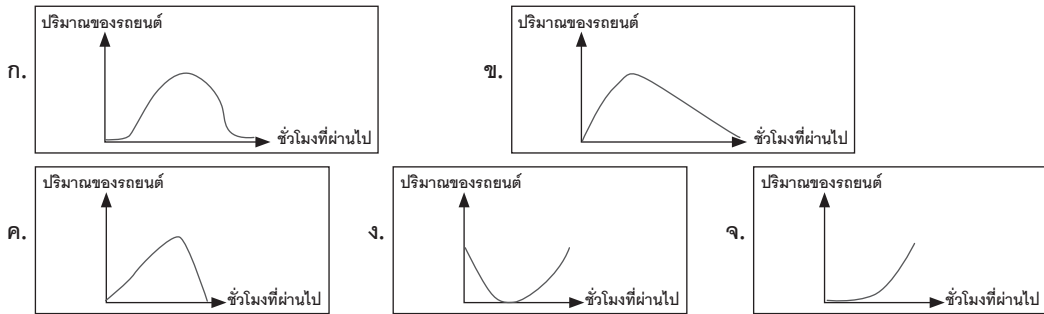
- 5) จากข้อมูลมีการแจกแจงความถี่ดังตารางต่อไปนี้

f	x	ก่อนการเปลี่ยนแปลงข้อมูล	หลังการเปลี่ยนแปลงข้อมูล
4		2	2
4		6	6
α		8	7
β		9	9

ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลก่อนการเปลี่ยนแปลงเป็น 6 และ 6.8 ตามลำดับ แล้ว จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลหลังการเปลี่ยนแปลงเป็นเท่าใด

- ก. $5\frac{1}{3}$ ข. $5\frac{2}{3}$ ค. 6 ง. $6\frac{2}{3}$ จ. 7
- 6) มี 6 และ 8 เป็นส่วนหนึ่งของข้อมูลทั้ง 7 จำนวน จะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าความแปรปรวนเป็น 8 และ 16 ตามลำดับ แล้ว จงหาค่าความแปรปรวนของข้อมูลทั้ง 5 จำนวน ที่ไม่รวม 6 และ 8 เป็นส่วนหนึ่งของข้อมูลชุดดังกล่าว
ก. $\frac{92}{5}$ ข. $\frac{134}{5}$ ค. $\frac{536}{25}$ ง. $\frac{112}{5}$ จ. $\frac{48}{5}$
- 7) พืชมกานต์ได้กรอกข้อมูลคะแนนสอบวิชาสถิติที่มีนักศึกษาลงทะเบียนเรียน 20 คน แล้วคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 10 คะแนน และ 2.5 คะแนน ตามลำดับ แต่พืชมกานต์ได้กรอกข้อมูลผิดไปคนหนึ่งจากข้อมูลเดิมเป็น 25 คะแนน แล้วต้องแก้ไขข้อมูลใหม่เป็น 35 คะแนน ดังนั้น ค่าความแปรปรวนที่ถูกต้องควรต้องเป็นเท่าใด
ก. 30 คะแนน ข. 29 คะแนน ค. 28 คะแนน ง. 27 คะแนน จ. 26 คะแนน
- 8) กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้ $b = a + c$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $a + 2$, $b + 2$ และ $c + 2$ เป็น d แล้ว ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง
ก. $b^2 = 3(a^2 + c^2) + 9d^2$ ข. $b^2 = a^2 + c^2 + 3d^2$ ค. $b^2 = 3(a^2 + c^2 + d^2)$ ง. $b^2 = 3(a^2 + c^2) - 9d^2$ จ. $b = a^2 + c^2 - d^2$
- 9) กำหนดให้ a, b และ n เป็นจำนวนนับ ที่ทำให้เกิดข้อมูล 2n จำนวน ได้แก่ $\underbrace{a, \dots, a}_{n \text{ term}}, \underbrace{-a, -a, \dots, -a}_{n \text{ term}}$ หากเกิดเพิ่มค่า b ในแต่ละข้อมูล จะทำให้เกิดค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใหม่เป็น 5 และ 20 ตามลำดับ แล้ว จงหาค่าของ $a^2 + b^2$
ก. 424 ข. 425 ค. 426 ง. 427 จ. 428

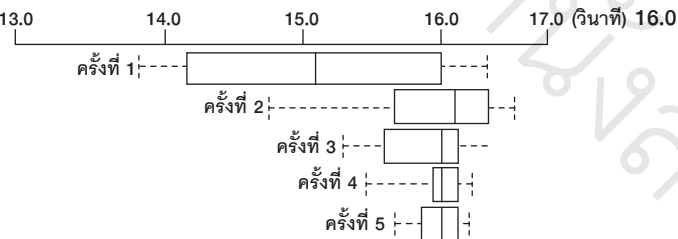
- 20) ตำรวจได้วิเคราะห์ปริมาณรถยนต์ที่ได้รับอุบัติเหตุบนถนนมิตรภาพในจังหวัดนครราชสีมา ที่มีการแจกแจงข้อมูลดังนี้ 4, 4, 9, 4, 9, 14, 4, 9, 14, 19, ..., 4, 9, 14, 19, ..., 179 และ 184 คัน แล้วตำรวจได้วิเคราะห์ปริมาณรถยนต์ที่ได้รับอุบัติเหตุบนถนนมิตรภาพ ในจังหวัดนครราชสีมา ด้วยกราฟส่วนโค้งอยู่ในลักษณะข้อใด จึงจะสอดคล้องกับข้อมูลที่เก็บมาได้



- 21) การนำลูกตุ้มปริมาณที่แตกต่างกันเป็นกองซ้อนวางบนรถไม้มาทดสอบแรงเสียดทานระหว่างชั้นบนของพื้นเอียงมายังชั้นล่างของพื้นเอียง โดยการจับเวลาใช้เคลื่อนที่ ตามตารางบันทึกผลการทดลองถึง 5 ครั้ง ในสมุดกระดาษ ดังนี้

ปริมาณลูกตุ้ม (ชั้น)	เวลาในการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มปริมาณที่แตกต่างกันเป็นกองซ้อนมาทดสอบแรงเสียดทานระหว่างชั้นบนของพื้นเอียงมายังชั้นล่าง (วินาที)				
ครั้งที่	1	2	3	4	5
1	15.1	16.3	1	15.9	15.9
2	16.5	15.8		16.2	16.1
3	14.7		15.5	16.0	16.0
4		16.7	16.2	16.1	
5	13.8	16.3	16.2	15.9	15.9

แต่ปรากฏว่าผู้ทดลองทำน้ำหนักใส่สมุดกระดาษ ทำให้ข้อมูลจางหายไปในส่วนที่ช่องว่าง แล้วมาทำการวิเคราะห์ตามแผนภูมิแท่งเทียบได้ว่า



ถ้าใส่ลูกตุ้มจำนวน 5 ชั้น ลงบนรถไม้มาทดสอบแรงเสียดทานระหว่างชั้นบนของพื้นเอียง แล้วครั้งที่ 1 เวลาในการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มปริมาณที่แตกต่างกันเป็นกองซ้อนมาทดสอบแรงเสียดทานระหว่างชั้นบนของพื้นเอียงมายังชั้นล่างได้กี่วินาที

- ก. 15.4 วินาที ข. 18.2 วินาที ค. 15.6 วินาที ง. 15.7 วินาที จ. 15.8 วินาที
- 22) ในฟาร์มแห่งหนึ่งไก่ได้ออกไข่เพื่อไว้ใช้เป็นอาหารมนุษย์ แล้วได้มีการบันทึกปริมาณไข่ไก่ที่ออกได้ในเวลาผ่านไปตามตารางดังนี้

จำนวนวันที่ผ่านไป (วัน)	5	7	9	10	12	15
ปริมาณไข่ไก่ที่ออกได้ (ฟอง)	8	6	2	2	2	6

จงหาค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ยของไข่ไก่ที่ออกแล้วได้บันทึกทั้งหมด

- ก. 3.48 ข. 3.58 ค. 3.68 ง. 3.78 จ. 3.38

- 1) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว จงหาจำนวนจุดทั้งหมดของ $f(x) = \begin{cases} x^2(a - b \cos 2x) & ; x < 0 \\ x^2 + cx + 2 & ; x \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$ ที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้
ก. 1 จุด ข. 2 จุด ค. 3 จุด ง. 4 จุด จ. หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด
- 2) กำหนดให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น, $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \leq 0 \\ \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}} & ; x > 0 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องบน $x = 0$ และ $f'(1) = f'(-1)$ แล้ว จงหาค่าของ $g(3)$
ก. $\ln\left(\frac{4}{9}\right) - 1$ ข. $\frac{1}{3} \ln\left(\frac{4}{9\sqrt[3]{e}}\right)$ ค. $\ln\left(\frac{4}{9\sqrt[3]{e}}\right)$ ง. $\frac{1}{3} \ln\left(\frac{4}{9}\right)$ จ. $\ln\left(\frac{4}{9}\right)$
- 3) กำหนดให้ $[t]$ เป็นจำนวนเต็มที่ยกที่สุดแต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ t และ $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ จะมีจุดบนของ $f(x) = \max\{1 + x + [x], 2 + x, x + 2[x]\}$ สามารถหาอนุพันธ์บนช่วง $(0, 2)$ ได้หรือไม่ และที่จุดใด
ก. สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดอยู่บนช่วง $(0, 2)$ ข. ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 0$
ค. ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 2$ ง. ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 0$ และ $x = 2$
จ. สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 3$
- 4) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) & ; x \leq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ แล้ว จุดบน $x = 0$ จะเกิดเหตุการณ์ในข้อใด
ก. f มีความต่อเนื่อง แต่ f' ไม่มีความต่อเนื่อง ข. f และ f' มีความต่อเนื่อง
ค. f มีความต่อเนื่อง แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ง. f' มีความต่อเนื่อง แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้
จ. f และ f' ไม่มีความต่อเนื่อง
- 5) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $f(x) = |x - 1|\cos|x - 2|\sin|x - 1| + (x - 3)|x^2 - 5x + 4|$ แล้ว จะมีจุดทั้งหมดกี่จุด ที่ทำให้ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้
ก. 1 จุด ข. 2 จุด ค. 3 จุด ง. 4 จุด จ. 5 จุด
- 6) กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ที่ทำให้ $f(x) + f'(x) + f''(x) = x^5 + 64$ แล้ว จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$
ก. -60 ข. -15 ค. 0 ง. 15 จ. 60
- 7) กำหนดให้ $[t]$ เป็นจำนวนเต็มที่ยกที่สุดแต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ t ที่ทำให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์
ของ $f(x) = \begin{cases} (x - [x])^{-1} \sin(x - [x]) & ; x \in (-2, -1) \\ \max\{2x, 3[x]\} & ; |x| < 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$ ณ จุดในข้อใด
ก. $x = -8$ ข. $x = -4$ ค. $x = 0$ ง. $x = 2$ จ. $x = 6$
- 8) กำหนดให้ $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ทั้งหมด 2 จุด ที่ทำให้ $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ และ $f(2) = 2$ แล้ว $f'(x)$ จะเกิดเหตุการณ์ในข้อใด
ก. $f'(x) = 0$ จะเกิดทุกจุดบนช่วง $x \in (0, 2)$ ข. $f'(x) = 0$ จะเกิดทุกจุดบนช่วง $x \in (0, 2)$
ค. $f'(x) = 0$ จะเกิดบางจุดบนช่วง $x \in (0, 2)$ ง. $f'(x) > 0$ จะเกิดบางจุดบนช่วง $x \in [0, 2]$
จ. $f'(x) = 0$ ไม่เกิดบนช่วง $x \in (0, 2)$
- 9) กำหนดให้ $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ที่ทำให้ $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ และ $f'(1) = 2,024$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง
ก. $xf'(x) + 2,024 f(x) = 0$ ข. $xf'(x) - 2,023 f(x) = 0$ ค. $xf'(x) - 2,024 (x) = 0$ ง. $xf'(x) + f(x) = 2,024$ จ. $-xf'(x) - f(x) = 2,022$
- 10) กำหนดให้ $f(x) = \frac{(2^x + 2^{-x})\tan x \sqrt{\arctan(x^2 - x + 1)}}{(7x^2 + 3x + 1)^3}$ แล้ว จงหาค่าของ $f'(0)$
ก. π ข. $\frac{\pi}{4}$ ค. 0 ง. $\frac{\pi}{2}$ จ. $2\sqrt{\pi}$
- 11) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ซึ่ง $3f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 10$ แล้ว จงหาค่าของ $\left|f(3) + f\left(\frac{1}{4}\right)\right|$
ก. $\frac{4}{5}$ ข. $\frac{3}{5}$ ค. 7 ง. 9 จ. 13

- 12) กำหนดให้ $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $f(x) = 2x + \arctan x$ และ $g(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 ก. จะมี $t \in [0, 3]$ ที่ทำให้ $f'(t) = g'(t)$ ข. สำหรับทุก $x \in (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ จะมี $0 - x_1 < x_2 < 3$ ทำให้เกิด $f(x) < g(x)$
 ค. $\max f(x) > \max g(x)$ ง. $\min f'(x) = 1 + \max g'(x)$ จ. $f'(1) = g'(1)$
- 13) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ 2 จุด ที่ทำให้ $f''(x) = g''(x) + 6x$, $f'(1) = 4g'(1) - 3 = 9$ และ $f(2) = 3g(2) = 12$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง
 ก. $g(-2) - f(-2) = 20$ ข. มี $x_0 \in (1, 1.5)$ ที่ทำให้ $f(x_0) = g(x_0)$
 ค. ถ้า $|f'(x) - g'(x)| < 6$ แล้ว $x \in (-1, 1)$ ง. ถ้า $x \in (-1, 2)$ แล้ว $|f(x) - g(x)| < 8$ จ. $f(x) = g(x) + x^3 + 3x - 6$
- 14) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ 2 จุด ที่ทำให้ $g'(0.5) = g'(1.5)$ และ $f(x) = 0.5[g(x) + g(2-x)]$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 ก. มี $x \in (0, 2)$ ทั้งหมด 3 จุด ที่ทำให้ $f''(x) = 0$ ข. $f'\left(\frac{3}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ค. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
 ง. มี $x \in (0, 0.4)$ เพียงจุดเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ จ. ไม่มีจุด $x \in (0, 1)$ ที่ทำให้ $f''(x) = 0$
- 15) กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ที่ทำให้ $(a + \sqrt{2b} \cos x)(a - \sqrt{2b} \cos y) = a^2 - b^2$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ ณ จุด $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
 ก. $\frac{a-2b}{a+2b}$ ข. $\frac{a-b}{a+b}$ ค. $\frac{b-a}{a+b}$ ง. $\frac{2a+b}{2a-b}$ จ. $\frac{2b-a}{a-2b}$
- 16) กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ จะมี a และ b เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้ $f(g(x)) = x$, $g'(a) = 5$, $g(a) = b$ แล้ว จงหาค่าของ $f'(b)$
 ก. $\frac{1}{5}$ ข. $\frac{2}{5}$ ค. 1 ง. 5 จ. 10
- 17) กำหนดให้ k และ m เป็นจำนวนจริงบวก ที่ทำให้ $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + k\sqrt{x+1} & ; k \in (0, 1) \\ mx^2 + k^2 & ; k \in [1, \infty) \end{cases}$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจำนวนจริงบวก แล้ว จงหาค่าของ $\frac{8f'(8)}{f'(0.125)}$
 ก. 97 ข. 123 ค. 198 ง. 218 จ. 309
- 18) กำหนดให้ $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$ แล้ว จงหาค่าของ $f''(-1) - f'(-1)$
 ก. 496 ข. 497 ค. 498 ง. 499 จ. 500
- 19) กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้ $f(x) = x^3 - x^2f'(1) + xf''(2) - f'''(3)$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 ก. $2f(0) - f(1) + f(3) = f(2)$ ข. $f(1) + f(2) + f(3) = f(0)$ ค. $f(3) - f(2) = f(1)$ ง. $3f(1) + f(2) = f(3)$ จ. $f(1) = f(2)$
- 20) กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้ $y\sqrt{1-x^2} = k - x\sqrt{1-y^2}$ และ $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ แล้ว จงหาค่าของ $y'\left(\frac{1}{2}\right)$
 ก. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ข. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ค. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ง. $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ จ. $\frac{4}{\sqrt{5}}$
- 21) กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ที่ทำให้ $x^b + y^b = a^b$ และ $\frac{dy}{dx} + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$ แล้ว จงหาค่าของ b
 ก. $\frac{1}{3}$ ข. $\frac{2}{3}$ ค. 1 ง. $1\frac{1}{2}$ จ. $1\frac{1}{3}$
- 22) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $f(1) = 1$ และ $f'(1) = 3$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{d}{dx}(f(f(f(1))) + (f(1))^2) + (f(1))^2)$
 ก. 9 ข. 15 ค. 21 ง. 33 จ. 45
- 23) กำหนดให้ $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ จะมี α เป็นจำนวนจริงบวก ที่ทำให้ $f(x) = \ln(\sin x)$ และ $g(x) = \arcsin(e^{-x})$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้องเกี่ยวกับ $a = (f(g(\alpha)))'$ และ $b = (f(g(\alpha)))$ มากที่สุด
 ก. $a\alpha^2 + b\alpha + 2\alpha^2 - a = 0$ ข. $a\alpha^2 + b\alpha + \alpha = 0$ ค. $a\alpha^2 + b\alpha - a = 0$ ง. $a\alpha^2 + b\alpha - a = 1$ จ. $a\alpha^2 + b\alpha - a = 0$
- 24) กำหนดให้ $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ที่ทำให้ $x = \sqrt{2^{\operatorname{arccosec}(t)}}$ และ $y = \sqrt{2^{\operatorname{arcsec}(t)}}$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$
 ก. $\frac{y}{x}$ ข. $\frac{x}{y}$ ค. $-\frac{y}{x}$ ง. $\frac{x}{y}$ จ. xy
- 25) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันผกผันของ g และ $f'(x) = \frac{1}{1+x^5}$ แล้ว จงหาค่าของ $g'(x)$
 ก. $\frac{1}{1+[g(x)]^5}$ ข. $1 + [g(x)]^5$ ค. $1 + x^5$ ง. $5x^4$ จ. $6x$

- 1) ถ้าผลคูณของลำดับเรขาคณิตทั้ง 3 จำนวน ที่อยู่ใกล้เคียงกัน มีค่าเป็น 27 แล้ว ผลรวมของลำดับเรขาคณิตทั้ง 3 จำนวน จะอยู่ช่วงใดต่อไปนี้
 ก. $[-3, \infty)$ ข. $(-\infty, 9]$ ค. $(-\infty, 9] \cup [-3, \infty)$ ง. $(-\infty, -3] \cup [9, \infty)$ จ. $[3, 9]$
- 2) กำหนดให้ลำดับที่ 2, 8 และ 44 เป็นลำดับเลขคณิต มีค่าเดียวกันกับลำดับที่ 1, 2 และ 3 เป็นลำดับเรขาคณิตที่ทำให้ลำดับเริ่มต้นของเลขคณิตเป็น 1 แล้ว จงหาผลรวมของลำดับเลขคณิตทั้งหมด 20 จำนวนแรก
 ก. 950 ข. 960 ค. 970 ง. 980 จ. 990
- 3) จงหาค่าของ $\sum_{t=1}^{10} \frac{t}{t^4 - 3t^2 + 1}$
 ก. $\frac{45}{109}$ ข. $-\frac{55}{109}$ ค. $\frac{55}{109}$ ง. $\frac{45}{109}$ จ. $\frac{88}{109}$
- 4) กำหนดให้ 3, a, b และ c เป็นลำดับเลขคณิต และ 3, a - 1, b + 1 และ c + 9 เป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ a, b และ c
 ก. 11 ข. 12 ค. 13 ง. 14 จ. 15
- 5) กำหนดให้ $\ln a$, $\ln b$ และ $\ln c$ เป็นลำดับเลขคณิต และ $\ln a - \ln 2b$, $\ln 25 - \ln 3c$ และ $\ln 3c - \ln a$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว จงหาค่าของ $a : b : c$
 ก. 6 : 3 : 2 ข. 9 : 6 : 4 ค. 25 : 10 : 4 ง. 16 : 4 : 1 จ. 8 : 4 : 1
- 6) ผลรวมของลำดับเรขาคณิตทั้งหมด 64 พจน์แรก มีค่าเป็น 7 เท่าของผลรวมของลำดับเรขาคณิตที่เป็นจำนวนนับคู่ ทั้งหมด 64 พจน์แรก แล้ว จงหาอัตราส่วนของลำดับเรขาคณิต
 ก. 4 ข. 5 ค. 6 ง. 7 จ. 8
- 7) กำหนดให้ $A = \{4, 9, 14, 19, \dots, 124\}$ และ $B = \{3, 6, 9, \dots, 111\}$ แล้ว จงหาค่าของ $n(A \cap B)$
 ก. 5 ข. 6 ค. 7 ง. 8 จ. 9
- 8) กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $c < b < a$ ที่ทำให้ $(a + b - 2c)x^2 + (b + c - 2a)x + (c + a - 2b) = 0$ จะได้ α เป็นคำตอบของสมการ แล้วเกิดข้อสรุปว่า A) ถ้า $\alpha \in (-1, 0)$ แล้ว b มีค่ามากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ a และ c B) ถ้า $\alpha \in (0, 1)$ แล้ว $b > c$ C) ถ้า $\alpha \in (0, 1)$ แล้ว b มีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ a และ c แล้ว ข้อใดต่อไปนี้นักกล่าวถูกต้องถึงจะเพียงพอในแต่ละข้อสรุป
 ก. A ถูก ข. B ถูก ค. C ถูก ง. A และ B ถูก จ. B และ C ถูก
- 9) ผลรวมของลำดับเรขาคณิตที่เพิ่มขึ้นในพจน์ที่ 6 และพจน์ที่ 8 มีค่าเป็น 2 และผลคูณของลำดับเรขาคณิตที่เพิ่มขึ้นในพจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 5 มีค่าเป็น $\frac{1}{9}$ แล้ว พจน์ที่ 2 ของลำดับเรขาคณิตเป็นเท่าใด
 ก. $\frac{1}{8}$ ข. $\frac{1}{7}$ ค. $\frac{1}{6}$ ง. $\frac{1}{5}$ จ. $\frac{1}{4}$
- 10) กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงบวก ที่ทำให้ $a + b + c + d = 11$ แล้ว จงหาค่ามากที่สุดของ $\frac{a^2b^3c^2d}{3,750}$
 ก. 55 ข. 90 ค. 108 ง. 110 จ. 130
- 11) จงหาค่าของ $5 + 8 + 14 + 23 + 35 + 50 + \dots + 1,310$
 ก. 12,324 ข. 12,325 ค. 12,326 ง. 12,327 จ. 12,328
- 12) ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องเกี่ยวกับ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n)!}$
 ก. ลู่เข้าสู่ $\frac{11e}{2} + \frac{7}{2e}$ ข. ลู่เข้าสู่ $\frac{13e}{4} + \frac{5}{4e}$ ค. ลู่ออก ง. ลู่เข้าสู่ $\frac{13e}{4} + \frac{5}{4e} - 4$ จ. ลู่เข้าสู่ $\frac{11e}{2} + \frac{7}{2e} - 4$
- 13) ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องเกี่ยวกับ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} x^{n+1}$ สำหรับ $x \in (0, 1)$ ใด ๆ
 ก. ลู่เข้าสู่ $x \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \ln(1-x)$ ข. ลู่เข้าสู่ $x \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \ln(1-x)$ ค. ลู่ออก
 ง. ลู่เข้าสู่ $\frac{1-x}{1+x} + \ln(1-x)$ จ. ลู่เข้าสู่ $\frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x)$

- 14) กำหนดให้ p, q และ r เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $x^{pq^2} = y^{qr} = z^{p^2r}$ และ $r - 1 = pq$ ที่ทำให้ $3, 3 \log x, 3 \log y$ และ $7 \log z$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเป็น 0.5 แล้ว จงหาค่าของ $r - p - q$
 ก. 0 ข. 2 ค. 6 ง. 12 จ. 18
- 15) ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ต้องเกี่ยวกับ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 6n + 10}{(2n + 1)!}$
 ก. ลู่เข้าสู่ $\frac{41e}{8} + \frac{19}{8e} - 10$ ข. ลู่เข้าสู่ $\frac{41e}{8} - \frac{19}{8e} - 10$ ค. ลู่ออก ง. ลู่เข้าสู่ $\frac{41e}{8} + \frac{19}{8e} + 10$ จ. ลู่เข้าสู่ $-\frac{41e}{8} + \frac{19}{8e} - 10$
- 16) กำหนดให้ a, b, c, d และ p เป็นจำนวนจริงแตกต่างกันที่ไม่ใช่ศูนย์ ที่ทำให้ $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)p + (b^2 + c^2 + d^2) = 0$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ต้อง
 ก. a, c และ d เป็นลำดับเรขาคณิต ข. a, b, c และ d เป็นลำดับเรขาคณิต ค. a, b, c และ d เป็นลำดับเลขคณิต
 ง. a, c และ p เป็นลำดับเลขคณิต จ. a, b, c และ p เป็นลำดับเรขาคณิต
- 17) กำหนดให้ a, b และ c เป็นลำดับเลขคณิต ภายใต้เงื่อนไขว่า $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1$ และ $abc \neq 0$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ต้อง
 ก. $\sum_{n=0}^{\infty} a^n, \sum_{n=0}^{\infty} b^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ เป็นลำดับเลขคณิต ข. $\sum_{n=0}^{\infty} a^n, \sum_{n=0}^{\infty} b^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ เป็นลำดับเรขาคณิต
 ค. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)^{-1}, \left(\sum_{n=0}^{\infty} b^n\right)^{-1}$ และ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right)^{-1}$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก ง. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)^{-1}, \left(\sum_{n=0}^{\infty} b^n\right)^{-1}$ และ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right)^{-1}$ เป็นลำดับเลขคณิต
 จ. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)^{-1} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b^n\right)^{-1} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right)^{-1} = 1 - (a + b + c)$
- 18) ข้อใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก
 ก. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3}$ ข. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2^2}$ ค. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^4+2)\sqrt{n}}$ ง. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ จ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n \sin n)^2}{2^n}$
- 19) ยศวัฒน์ได้ซื้อบ้านที่หมู่บ้านเจริญทรัพย์ราคาหลังละ P บาท แบ่งผ่อนกับหมู่บ้านเจริญทรัพย์ในงวดละ r บาท ซึ่งให้ดอกเบี้ยร้อยละ i ต่อปี ในค่างวดเริ่มต้นอยู่ที่ R บาท แล้ว ยศวัฒน์ควรต้องผ่อนบ้านทั้งหมดกี่งวด
 ก. $\ln\left(1 - \frac{rP}{R}\right) [\ln(1+r)^{-1}]^{-1}$ งวด ข. $\ln\left(1 - \frac{rP}{R}\right) \ln(1+r)$ งวด ค. $\ln\left(\frac{R}{R-rp}\right) \ln(1+r)$ งวด
 ง. $\ln\left(\frac{R}{R-rp}\right) [\ln(1+r)^{-1}]^{-1}$ งวด จ. $\ln\left(\frac{R}{R-rp}\right) \ln\left(\frac{1}{1+r}\right)$ งวด
- 20) จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{25} \frac{2}{16n - 4n^2 - 15}$
 ก. $\frac{51}{144}$ ข. $\frac{49}{138}$ ค. $\frac{50}{141}$ ง. $\frac{52}{147}$ จ. $\frac{53}{144}$
- 21) จงหาค่าของ $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} - \frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^4}\right) + \dots$
 ก. $\frac{1}{6}$ ข. $\frac{1}{5}$ ค. $\frac{1}{4}$ ง. $\frac{1}{3}$ จ. $\frac{1}{2}$
- 22) อัตราส่วนของผลรวมตั้งแต่ 5 พจน์แรก ต่อผลรวมตั้งแต่ 9 พจน์แรก มีค่าเท่ากับ $5 : 17$ และพจน์ที่ 15 มีค่าอยู่ระหว่าง 110 และ 120 ที่เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว จงหาผลรวมตั้งแต่ 10 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตที่เป็นจำนวนนับ
 ก. 290 ข. 380 ค. 460 ง. 510 จ. 600
- 23) ผลคูณของลำดับเรขาคณิตที่เป็นจำนวนบวกคือตั้งแต่ 4 พจน์แรก เป็น $\frac{1}{1,296}$ และผลบวกของลำดับเรขาคณิตที่เป็นจำนวนนับคู่ตั้งแต่ 2 พจน์แรก เป็น $\frac{7}{36}$ แล้ว จงหาผลรวมของพจน์ที่ 6, 8 และ 10
 ก. 33 ข. 37 ค. 41 ง. 43 จ. 47
- 24) จงหาค่าของ $\frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 2^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \dots + \frac{21}{10^2 \times 11^2}$
 ก. 1 ข. $\frac{120}{121}$ ค. $\frac{99}{100}$ ง. $\frac{143}{144}$ จ. $\frac{156}{159}$
- 25) จงหาค่าของ $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \dots}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \dots}$
 ก. $1\frac{2}{9}$ ข. 1 ค. $-1\frac{2}{9}$ ง. $-3\frac{2}{3}$ จ. $3\frac{2}{3}$

Up Level MATHS

- สรุปหลักคณิตศาสตร์ ม. 4-5-6 ครบถ้วนทั้งเนื้อหา และแนวข้อสอบ
- เสริมหลักการคิดวิเคราะห์โจทย์ เทคนิคการจำสูตร และต่อยอดหลักการคิดหาคำตอบ
- พร้อมการสอบ A-Level และการสอบวัดคะแนนของสถาบันการศึกษา

หนังสือแนะนำเพื่ออ่านเสริมเพิ่มความมั่นใจ 100%

เน้นครบทุกหัวข้อการสอบของวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 และ 2 ตามกฎเกณฑ์การสอบ A-Level ในสนามสอบจริง โดยวัดการประยุกต์ใช้ความรู้ที่มีเนื้อหาตามสาระการเรียนรู้แกนกลางและสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

หนังสือแนะนำ



ซื้อสะดวก ส่งถึงบ้านที่ Shopee และ Lazada หรือผ่านทางร้านหนังสือออนไลน์
www.thinkbeyondbook.com และ www.serazu.com



thinkbeyond books